



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

TRABAJO FINAL DE GRADO

Grado en Ingeniería Mecánica

**SIMULACIÓN MEDIANTE DINÁMICA DE
FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD) DE UN
INTERCAMBIADOR DE FLUJO CRUZADO**



Memoria y anexos

Autor:	Adrià Giraldo Vivas
Director:	Ricardo Javier Principe Rubio
Departamento	Mecánica de Fluidos
Convocatoria:	Octubre 2017

Resum

Amb aquest treball es pretén simular el que passa quan un flux d'aire turbulent flueix a través d'un intercanviador de calor de flux creuat, fent servir la mecànica de fluids computacional (CFD). Inicialment per familiaritzar-se amb el programa d'elements finits amb el que s'utilitzarà per resoldre el problema, es resol el flux a través d'un canal, un cas molt més senzill en el que es coneixen els resultats. Un cop s'han obtingut uns resultats pròxims als esperats y es coneix bé com opera el programa, es resol el intercanviador de calor. Per comprovar que els resultats del intercanviador son raonables, s'analitzen y es comparen amb els d'un experiment previ en el laboratori amb les mateixes condicions.

Tan els resultats del problema de canal com els del intercanviador de calor s'aproximen molt bé als de referència, encara que en l'intercanviador al ser un problema més complex, s'ha obtingut una certa asimetria al llarg del canal que no s'esperava.

Es pot concloure que s'han obtingut uns bons resultats tenint en compte que el model utilitzat per resoldre els problemes simplifica moltíssim el règim turbulent, y que les limitacions del programa, no han permès definir el problema de la manera més adequada.

Resumen

Con este trabajo se pretende simular lo que ocurre cuando un flujo de aire turbulento fluye a través de un intercambiador de calor de flujo cruzado, usando la mecánica de fluidos computacional (CFD). Inicialmente para familiarizarse con el programa de elementos finitos con el que se utilizará para resolver el problema, se resuelve el flujo a través de un canal, un caso mucho más sencillo en el que se conocen los resultados. Una vez se han obtenido unos resultados próximos a los esperados y se conoce bien cómo opera el programa, se resuelve el intercambiador de calor. Para comprobar que los resultados del intercambiador son razonables, se analizan y se comparan con los de un experimento previo en el laboratorio con las mismas condiciones.

Tanto los resultados del problema del canal como los del intercambiador de calor se aproximan muy bien a los de referencia, aunque en el intercambiador al ser un problema más complejo, se ha obtenido una cierta asimetría a lo largo del canal que no se esperaba.

Se puede concluir que se han obtenido unos buenos resultados, teniendo en cuenta que el modelo usado para resolver los problemas simplifica muchísimo el régimen turbulento, y que las limitaciones del programa, no ha permitido definir el problema de la manera más adecuada.

Abstract

The aim of this project is to simulate what happens when a turbulent air flux flows through a cross flow heat exchanger, using computational fluid dynamics (CFD). Initially, in order to get used to the finite element program that will be used to solve the problem, a channel flow is solved, which is a much easier case in which the results are known. Once the results are close to the expected ones and it is well known how to operate with the program, the heat exchanger is solved. To check that the results of the exchanger are reasonable, they are analyzed and compared with the ones done in a previous experiment at the laboratory with the same conditions.

The results from the channel problem and also the heat exchanger are very close to the reference ones, however, in the heat exchanger, which is a more complex problem, a slight asymmetry has been found along the channel, which was not expected.

We can conclude that good results have been obtained, considering that the model used to solve the problems simplifies a lot the turbulent phenomena, and the limitations that the program has, hasn't allowed to define the problem to the most proper way.

Agradecimientos

En primer lugar agradecer a mi tutor del proyecto Javier Principe por el soporte, orientación y paciencia a lo largo de todo el proceso.

A mi familia y amigos por el apoyo, motivación y ánimos que me han dado.



Índice

Resum	i
Resumen	ii
Abstract.....	iii
Agradecimientos	v
 1. Introducción.....	 1
1.1. Objetivos del trabajo	1
 2. Intercambiador de calor	 4
2.1. Clasificación de los intercambiadores de calor	4
2.2. Intercambiador de flujo cruzado del laboratorio de mecánica de fluidos	5
 3. Conceptos básicos dinámica de fluidos.....	 8
3.1. Descripciones lagrangiana y euleriana.....	8
3.2. Campo de aceleraciones.....	8
3.3. El teorema del transporte de Reynolds.....	9
3.4. Principio de conservación de la masa: ecuación de continuidad	9
3.4.1. Balance de masa para sistemas de flujo estacionario	10
3.4.2. Balance de masa para flujo incompresible	11
3.5. Fuerzas que actúan sobre un volumen de control	11
3.6. Principio de conservación del momento lineal o de la cantidad de movimiento	12
3.6.1. Presión modificada P^*	14
3.7. Número de Reynolds.....	14
3.8. Flujo laminar	15
3.9. Flujo turbulento y modelos de turbulencia.....	15
3.9.1. Modelos de dos ecuaciones; modelo $k - \varepsilon$ y modelo $k - \omega$	17
3.10. Regiones del flujo turbulento en la capa límite.....	18
3.10.1. Subcapa viscosa o laminar	18
3.10.2. Capa de amortiguamiento.....	19
3.10.3. Capa de transición	19

3.10.4. Capa turbulenta exterior	20
4. Simulación de un flujo a través de un canal	21
4.1. Flujo de régimen laminar.....	24
4.2. Flujo de régimen turbulento	25
4.3. Resultados de las simulaciones	29
5. Simulación del intercambiador de calor	38
5.1. Resultados de las simulaciones	43
6. Conclusiones	51
7. Presupuesto	53
8. Bibliografía	55
Referencias bibliográficas	55
Bibliografía complementaria	55
Anexo A: Tutorial del flujo laminar $Re = 10$ a través de un canal	57
Anexo B: Archivo case.sif del flujo $Re\tau = 5200$ a través de un canal	69
Anexo C: Archivo case.sif del intercambiador de calor	71

1. Introducción

El uso de un programa de simulación computacional basado en la técnica de elementos finitos, no presenta ninguna dificultad operativa para quien tenga conocimientos básicos en computación, permitiendo simular con facilidad cualquier tipo de problema. Sin embargo para obtener unos resultados razonables es fundamental una adecuada evaluación de estos, para ello es necesario conocer la física que describe el tipo de problema estudiado y los métodos numéricos de resolución.

A la hora de diseñar o estudiar un sistema de fluidos, se puede hacer a partir de la experimentación, haciendo un modelo y ensayándolo, o bien resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen ese sistema. Si el sistema es muy sencillo, con simplificaciones se puede llegar a resolver analíticamente, pero en la mayoría de los casos no es posible ya que se tiene un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y no lineales, donde en este caso, se recurre a la dinámica de fluidos computacional CFD (siglas en inglés) que estudia los métodos para resolverlas a través de computadoras.

La simulación de fluidos tiene la ventaja de realizar cálculos complejos ahorrando costosos experimentos con modelos a escala. Sin embargo, comúnmente para validar los resultados numéricos, se complementa con un análisis experimental del modelo final comparando las soluciones, de esta manera se reduce el número de experimentos. Con solo cambiar los datos de entrada o el diseño del modelo, permite obtener multitud de configuraciones reduciendo significativamente el tiempo de estudio. Además, las geometrías de los modelos al ser realizadas con mallas de miles de nodos, permiten una visualización muy detallada de los resultados en cualquier punto.

Las principales desventajas que tiene la simulación de fluidos son, que requiere computadoras de gran memoria con procesadores de frecuencia elevada, y es fundamental tener conocimientos avanzados tanto en dinámica de fluidos como en métodos numéricos para lograr resultados razonables y fiables.

1.1. Objetivos del trabajo

El objetivo principal de este trabajo es hacer una simulación del intercambiador de calor que se dispone en el laboratorio de mecánica de fluidos, con las mismas condiciones y parámetros de un ensayo experimental previo en el laboratorio.

Actualmente los flujos de régimen laminar son fáciles de resolver, sin embargo en este caso se tiene un régimen de flujo turbulento, el cual no tienen una manera única y universal de resolverse y es necesario estudiar que método es más apropiado.

Si el número de Reynolds no es muy elevado y el sistema que se quiere resolver no es muy complejo, se pueden resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, sin aplicar ningún modelo de turbulencia a partir de la llamada simulación

numérica directa DNS (siglas en inglés). Este tipo de simulación resuelve todo el rango de escalas espaciales y temporales del flujo turbulento, por tanto demanda una malla muy fina, computadoras con gran memoria y velocidad de procesamiento, y un tiempo de cálculo de la CPU enorme. Actualmente los resultados que se obtienen por DNS se pueden considerar equivalentes a los resultados experimentales.

Otro tipo de simulación que reduce considerablemente la demanda de recursos computacionales es la llamada simulación de remolinos grandes (Large eddy simulation, LES). Este tipo de simulación resuelve directamente los vórtices turbulentos de escalas grandes, mientras que las escalas pequeñas se modelan, ya que son estadísticamente predecibles.

En la mayoría de los casos resolver un sistema complejo a partir de DNS o LES tiene un coste computacional muy grande y a veces no nos interesan unos resultados tan precisos, en este caso se recurre a los modelos de turbulencia, en los que se modelan todas las escalas del flujo turbulento.

Los principales modelos más usados son el modelo $k - \varepsilon$ y el $k - \omega$, estos se basan en la ecuación de Navier-Stokes promediada en el tiempo y en el espacio, llamada ecuación de Navier-Stokes de Reynolds promedio (RANS, siglas en inglés).

El modelo $k - \varepsilon$ es uno de los modelos más comunes utilizados en la CFD debido a su buena convergencia y los bajos requerimientos de memoria, siendo una buena opción para determinar una buena estimación inicial del problema. Las desventajas que tiene este modelo es que no trabaja bien para gradientes de presión adversos y números de Reynolds bajos. Tampoco da buenos resultados en las proximidades de las paredes, por tanto utiliza funciones de pared para modelar lo que sucede en la capa límite sin simularlo.

El modelo $k - \omega$ es similar al $k - \varepsilon$ pero le cuesta un poco más converger y más sensible a la condición inicial, con la ventaja de que trabaja bien en números de Reynolds bajos y no es necesario utilizar leyes de pared, ya que da buenos resultados en la capa límite. Una buena estrategia es resolver un problema a partir del modelo $k - \varepsilon$ y a continuación compararlo con una simulación posterior con el modelo $k - \omega$.

Como las computadoras que se disponen para correr el problema son de uso personal, viendo las ventajas y desventajas de los modelos expuestos, se ha decidido que el modelo más adecuado para este caso es el modelo $k - \varepsilon$. El programa usado para ejecutar la simulación del intercambiador de calor se trata de *Elmer*, un programa de libre distribución basado en elementos finitos, que lleva implementado el modelo $k - \varepsilon$. Este programa no presenta dificultades operativas ya que tiene una interfaz gráfica sencilla donde se escriben los datos de entrada, permite importar mallas generadas con otros programas y visualizar la gráfica de convergencia y las iteraciones que va realizando mientras se ejecuta el problema. La desventaja que tiene *Elmer* es que no está optimizado para el cálculo de flujos turbulentos y la documentación es muy escasa.

Con este modelo se pretende “calibrar” los parámetros y condiciones de contorno lo más próximas a las del laboratorio, para obtener unos resultados razonables. El problema se define de la manera más óptima dentro de las limitaciones del programa, las cuales condicionan la

estrategia para resolver el problema y como consecuencia los resultados. También es fundamental un buen diseño de la malla, eligiendo el tamaño adecuado según el régimen del flujo, y el correcto refinamiento en las paredes, ya que influye directamente sobre el resultado que obtengamos. Con las grandes simplificaciones del flujo que hace el modelo $k - \varepsilon$, usar un sistema en tres dimensiones no añadiría más precisión a los resultados, por lo que se estudia en dos dimensiones.

Este trabajo además pretende ser útil para aquellos que quieran utilizar el mismo modelo en un trabajo posterior, y tener una referencia para facilitar el “calibrado” de los parámetros para un problema similar. El estudio también servirá con finalidad docente como complementación de la práctica de laboratorio de ingeniería térmica, en la que se estudia y experimenta con el intercambiador de calor. Está fuera del alcance de este trabajo, el estudio de la transferencia de calor y el transitorio de enfriamiento de los tubos del intercambiador, el cual podría desarrollarse en un trabajo posterior. Además, se podría aplicar el modelo $k - \omega$ y comparar si los resultados son mejores.

La memoria inicia con una descripción de los principales intercambiadores de calor y el que se dispone en el laboratorio, en el capítulo 2. A continuación, en el capítulo 3 se desarrollan los conceptos fundamentales de la dinámica de fluidos. Se comienza con los dos tipos de descripción de movimiento de fluidos, seguido de la introducción del Teorema del transporte de Reynolds. A continuación se deducen las ecuaciones diferenciales del movimiento de fluidos, incluyendo el principio de conservación de la masa, el principio de conservación de cantidad de la cantidad de movimiento y la ecuación de Navier-Stokes. Más adelante se presentan los principales modelos de turbulencia utilizados en la mecánica de fluidos computacional, con el objetivo de resolver las complejas ecuaciones diferenciales del flujo.

Antes de resolver el problema del intercambiador de calor, en el capítulo 4 se resuelve el flujo a través de un canal, un caso más sencillo en el que se conocen los resultados. De esta manera permite familiarizarse con las funciones y la estructura del algoritmo de resolución de *Elmer*, además de poder comprobar que se están definiendo todos los parámetros correctamente y que los resultados coinciden con los cálculos analíticos. Estos resultados se analizan mediante el programa de postprocesado, *ParaView*, que permite visualizar y compararlos con los de referencia.

Finalmente, en el capítulo 5, una vez se tiene todo “calibrado” y se conoce bien el funcionamiento del intercambiador de calor, se simula con los mismos parámetros usados en un ensayo experimental previo, y se discuten y comparan los resultados obtenidos.

2. Intercambiador de calor

Un intercambiador de calor es un sistema de intercambio de energía en forma de calor entre dos medios a diferente temperatura. El medio puede ser un fluido o una superficie sólida.

2.1. Clasificación de los intercambiadores de calor

La clasificación más común se hace a partir del grado de contacto entre los dos fluidos. De esta manera se distinguen los siguientes tipos;

Intercambiadores de contacto directo: Son aquellos en los que los dos fluidos entran en contacto directo entre ellos, es decir se mezclan.

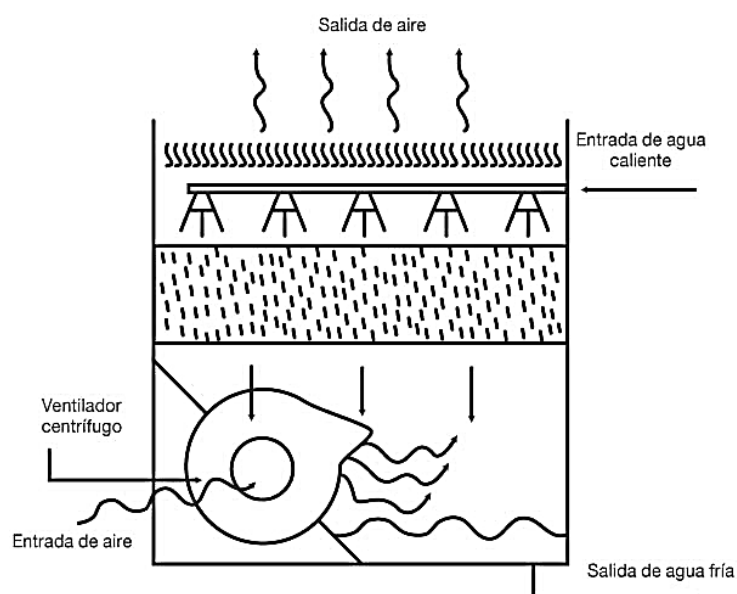


Figura 2.1. Esquema de un intercambiador de contacto directo, común en torres de refrigeración. [1]

Intercambiadores de contacto indirecto: Son aquellos en los que los fluidos están separados por una superficie sin entrar en contacto directo entre ellos. Estos pueden clasificarse como;

- **Intercambiadores alternativos:** En este caso los dos fluidos recorren un mismo espacio alternativamente
- **Intercambiadores de superficie:** En este caso los dos fluidos están separados por una superficie. Estos pueden ser de placas o de tubos. En los intercambiadores de tubos, uno de los fluidos circula por el interior del tubo y el otro por el exterior. Cuando las direcciones de los flujos forman un ángulo entre sí, se les llaman de flujo cruzado y cuando los dos flujos circulan paralelamente se les nombra como intercambiadores de flujo paralelo o a contracorriente dependiendo del sentido del flujo.

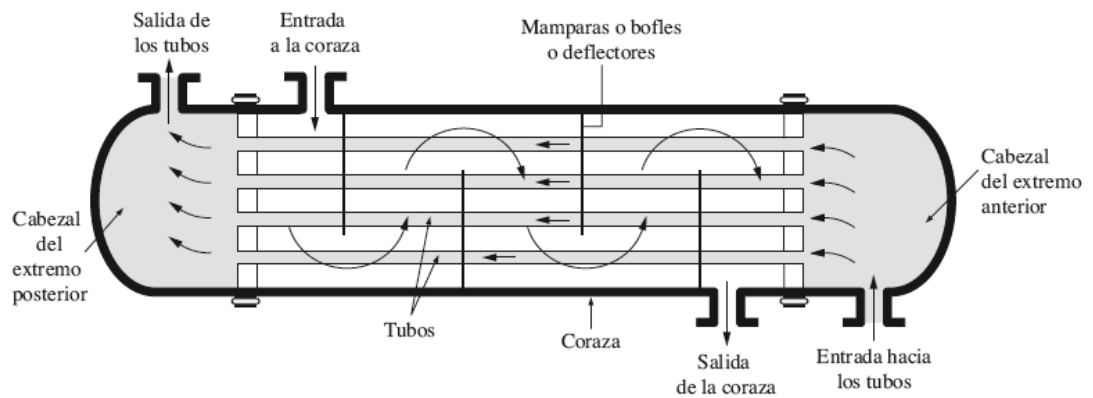


Figura 2.2. Esquema de un intercambiador de contacto indirecto de tubos. [2 p. 631]

2.2. Intercambiador de flujo cruzado del laboratorio de mecánica de fluidos

En este trabajo nos centraremos en el estudio de un intercambiador de flujo cruzado, concretamente el que se dispone en el laboratorio de mecánica de fluidos.

El equipo dispone de los siguientes elementos numerados en la Figura 2.3;

1. Banco de soporte.
2. Tobera de sección cuadrada.
3. Canal de aspiración de sección cuadrada.
4. Zona de ensayo donde se sitúan los tubos en dirección normal al flujo.
5. Difusor.
6. Ventilador centrífugo.
7. Conducto de salida.
8. Tubo de Pitot.
9. Manómetro.
10. Válvula.
11. Orificio calentador.
12. Termopar 1.
13. Termopar 2.

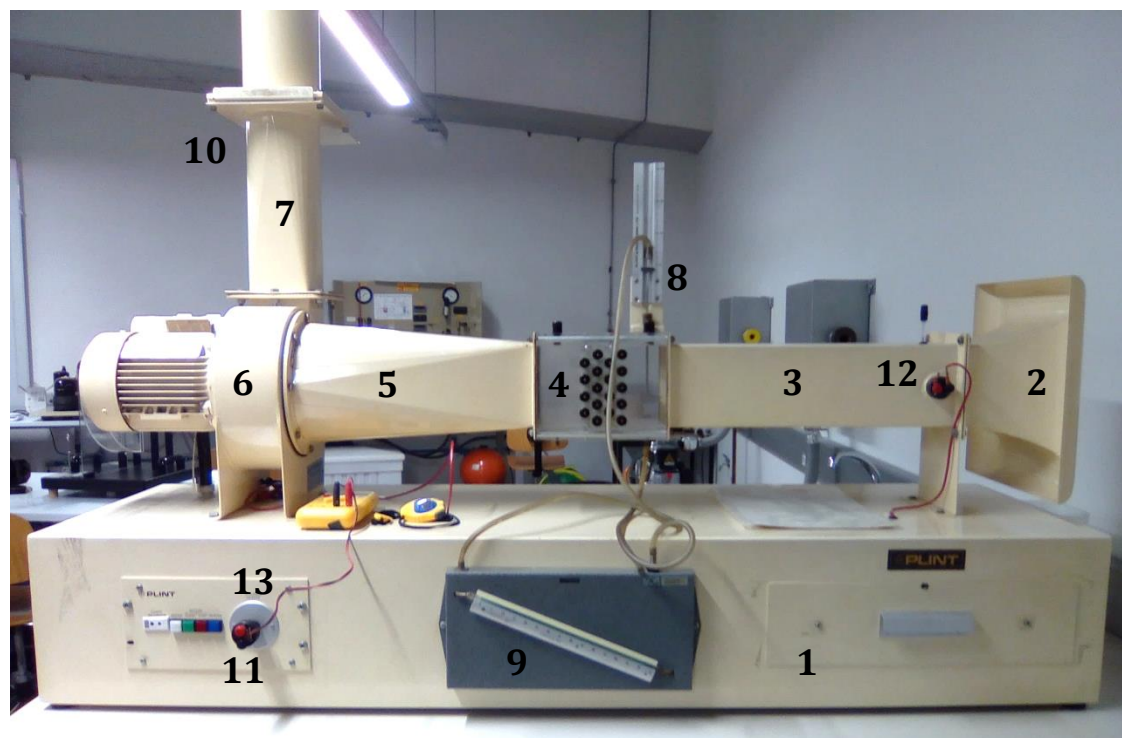


Figura 2.3. Vista general del equipo del laboratorio con los elementos numerados.



Figura 2.4. Tobera de entrada con el termopar 1 y el termómetro.

Funcionamiento: El aire entra por la tobera y se desarrolla a lo largo del tubo de aspiración hasta llegar a la zona de ensayo donde se encuentran los tubos situados perpendicularmente a la dirección del flujo. Los tubos simulan los conductos por donde circularía otro de los fluidos implicados en la transferencia. En la zona de ensayo también se encuentra un tubo de Pitot conectado a un manómetro para medir la presión total en diferentes alturas del canal, que puede colocarse tanto aguas arriba como aguas abajo. Después de pasar por la zona de ensayo, el flujo circula por un difusor con un tranquilizador de abeja en la entrada, para suavizar las turbulencias antes de entrar al ventilador centrífugo, encargado de aspirar el aire. En el conducto de salida se

encuentra una válvula en forma de guillotina que permite regular el porcentaje de caudal que circula.

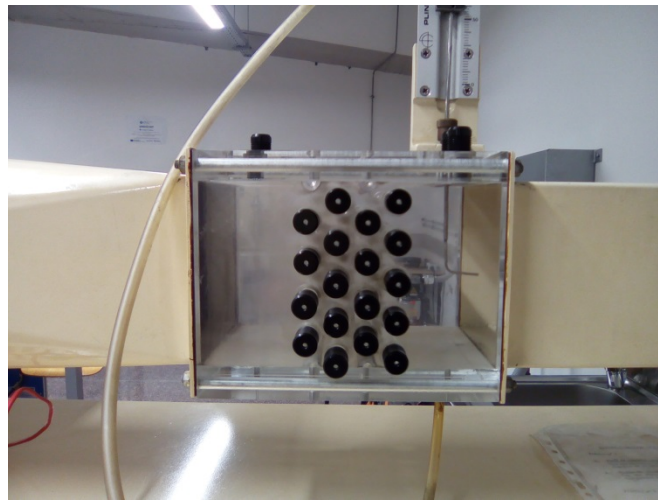


Figura 2.5. Zona de ensayo donde se sitúan los tubos en dirección normal al flujo.



Figura 2.6. Válvula en forma de guillotina con el porcentaje graduado.

Para estudiar la transferencia de calor, uno de los tubos de metacrilato se sustituirá por un tubo de cobre previamente calentado en un orificio calentador formado por resistencias eléctricas. La diferencia de temperatura entre el aire y el tubo de cobre se mide a partir de dos termopares, uno situado en la tobera y el otro en el interior del tubo de cobre, proporcionada en voltaje, con un factor de conversión de $1^{\circ}\text{C} = 0,041\text{ mV}$.

3. Conceptos básicos dinámica de fluidos

3.1. Descripciones lagrangiana y euleriana

La cinemática de fluidos a diferencia de la dinámica, es el estudio que explica cómo fluyen los fluidos y describe su movimiento sin considerar como han sido producidos. Para describir el movimiento hay dos métodos de plantearlo, el primero y más conocido es la descripción lagrangiana del movimiento de fluidos. En este método se usan las leyes de Newton para describir el movimiento de cuerpos de masa fija, siguiendo el rastro del vector posición y velocidad para cada uno, como funciones del tiempo. Un ejemplo clásico, es el problema de física en el que se estudia el comportamiento de dos bolas de billar que chocan entre ellas o contra la pared. En cambio en los fluidos no se pueden identificar con facilidad las partículas, además de que un fluido está formado por miles de millones de moléculas, por este motivo se utiliza otro método para describir el flujo, la descripción euleriana del movimiento de fluidos. En esta descripción se define un dominio finito llamado volumen de control VC, a través del cual el fluido fluye a través del dominio sin importar la posición y la velocidad de las partículas, en lugar de esto se centra en las variables, independientemente de las partículas que circulen. Un ejemplo práctico para distinguir los dos métodos, es imaginar que queremos estudiar el caudal de un río, según el enfoque lagrangiano, dejaríamos que una sonda se desplazase con la corriente, mientras que con el enfoque euleriano fijaríamos la sonda en un punto concreto del río. Para definir la velocidad y otras variables se utilizan variables de campo dentro del volumen de control.

3.2. Campo de aceleraciones

Las leyes fundamentales de conservación se expresan a partir de la descripción lagrangiana para un sistema de masa fija, también llamado sistema de control SI. Para el estudio de fluidos es más conveniente usar la descripción euleriana, definida a partir de un volumen de control VC.

En lugar de seguir la posición y otras variables de una partícula, se definen variables de campo, funciones que dependen del espacio y del tiempo, dentro del volumen de control. Para hacer esta conversión es necesario hacer algunas manipulaciones matemáticas.

Por definición la aceleración de una partícula es;

$$\vec{a}_{partícula} = \frac{d\vec{V}_{partícula}}{dt}. \quad (3.1)$$

Como en cualquier instante de tiempo la velocidad de la partícula es igual al valor del campo de velocidad en la ubicación de la misma, se puede expresar la aceleración como una variable de campo aplicando la regla de la cadena para las variables independientes de la velocidad (x, y, z, t) .

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \quad (3.2)$$

Donde $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente u operador nabla;

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k. \quad (3.3)$$

El primer término de la ecuación, $\partial \vec{V} / \partial t$, se llama aceleración local o no-estacionaria, diferente de cero en flujos no estacionarios. El término $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$, es la aceleración convectiva, y puede ser diferente de cero incluso en flujos estacionarios. Este término explica el efecto de que la aceleración puede ser diferente entre distintos puntos. Se define como estacionario cuando las propiedades en un punto especificado del campo de flujo no cambian respecto al tiempo.

El operador derivada total o material d/dt se define cuando se sigue una partícula de fluido a lo largo del tiempo por el campo de flujo y se puede expresar también como una variable de campo para otras propiedades de los fluidos.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}). \quad (3.4)$$

3.3. El teorema del transporte de Reynolds

La mayoría de los principios de la mecánica de fluidos son obtenidos a partir de la mecánica de sólidos, expresados para un sistema de control, donde el tamaño y la forma pueden cambiar a lo largo del tiempo pero la masa no puede cruzar el contorno del sistema de control. En la mecánica de fluidos es más conveniente trabajar con un volumen de control, el cual también puede deformarse, pero a diferencia del sistema de control, la masa puede transferirse a través de la superficie de control, por lo tanto es necesario relacionar los cambios en un sistema con los cambios de un volumen de control.

El teorema del transporte de Reynolds nos transforma la razón de cambio respecto del tiempo de cualquier propiedad B de un sistema de control con la razón de cambio respecto del tiempo de B del volumen de control más el flujo neto de B hacia a fuera de este volumen.

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{SC} \rho b (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA. \quad (3.5)$$

Donde b es igual a la propiedad B por unidad de masa;

$$b = \frac{B}{m}. \quad (3.6)$$

3.4. Principio de conservación de la masa: ecuación de continuidad

Este principio para un volumen de control se puede expresar como: La transferencia neta de masa hacia a dentro o fuera de un volumen de control en un intervalo de tiempo es igual al cambio neto en la masa total del volumen de control en ese intervalo de tiempo.

Se puede deducir a partir del teorema del transporte de Reynolds, tomando la propiedad B como la masa m . Entonces $b = m/m = 1$. Como la masa del sistema es constante, su derivada respecto al tiempo es cero, entonces nos queda;

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0. \quad (3.7)$$

Si dividimos la integral de superficie en dos, una para el flujo de entrada y otra para el de salida se puede expresar como;

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \sum_{sal} \int_A \rho V_n dA - \sum_{ent} \int_A \rho V_n dA = 0. \quad (3.8)$$

Aplicando la definición de razón de flujo de masa, también se puede expresar como;

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \sum_{sal} \dot{m} - \sum_{ent} \dot{m} = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación de continuidad se puede expresar en forma diferencial aplicando el teorema de divergencia o teorema de Gauss. Este teorema permite transformar una integral de volumen, de la divergencia de un vector, en una integral de área sobre la superficie que lo define. Siendo \vec{G} un vector cualquiera, la divergencia de \vec{G} se define como;

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_i}{\partial x} + \frac{\partial G_j}{\partial y} + \frac{\partial G_k}{\partial z}. \quad (3.10)$$

El teorema de divergencia se puede escribir como;

$$\int_V \nabla \cdot \vec{G} dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA. \quad (3.11)$$

Aplicando el teorema de divergencia en la ecuación de continuidad nos queda;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA &= \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \quad \forall VC. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4.1. Balance de masa para sistemas de flujo estacionario

En un sistema de flujo estacionario, la masa contenida dentro del volumen de control no varía con el tiempo, es decir $m = \text{constante}$, entonces la densidad también es constante, por tanto, la razón de flujo de masa de entrada es igual a la de salida;

$$\sum_{sal} \dot{m} = \sum_{ent} \dot{m} \quad (kg/s). \quad (3.13)$$

Se puede expresar también como;

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \forall VC. \quad (3.14)$$

3.4.2. Balance de masa para flujo incompresible

Cuando la variación de la densidad a lo largo del flujo, permanece aproximadamente constante se dice que el fluido es incompresible. Se pueden considerar como incompresibles los líquidos y los gases cuando el número de Mach del flujo es inferior a tres.

El número de Mach (M) se expresa como;

$$M = \frac{V}{V_s}. \quad (3.15)$$

Donde V es la velocidad del flujo y V_s la velocidad del sonido en el medio del flujo.

Cuando se cumplen estas condiciones se cancela la densidad en ambos lados de la ecuación;

$$\begin{aligned} \sum_{sal} \dot{m} &= \sum_{ent} \dot{m} ; \\ \sum_{sal} \rho V A &= \sum_{ent} \rho V A ; \\ \sum_{sal} \dot{V} &= \sum_{ent} \dot{V} \quad (m^3/s). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se puede expresar también como;

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \forall VC. \quad (3.17)$$

3.5. Fuerzas que actúan sobre un volumen de control

Las fuerzas que actúan sobre un volumen de control son; las fuerzas del cuerpo, que actúan sobre todo el volumen del cuerpo (como la fuerza de gravedad), y las fuerzas superficiales, que actúan sobre la superficie de control (como la fuerza de presión y la viscosa). Entonces la suma total de fuerzas que actúan sobre un volumen de control es;

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{cuerpo} + \sum \vec{F}_{superficial} ; \quad (3.18)$$

Expresado en forma integral;

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA. \quad (3.19)$$

3.6. Principio de conservación del momento lineal o de la cantidad de movimiento

La segunda Ley de Newton para un sistema sometido a una fuerza se expresa como;

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}). \quad (3.20)$$

Donde $m\vec{V}$ es el momento lineal del sistema.

De manera más general;

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{sist} \rho \vec{V} dV. \quad (3.21)$$

A partir del teorema del transporte de Reynolds nos permite transformar la ecuación de sistema a la de volumen de control tomando como propiedad B, el momento lineal $m\vec{V}$ y entonces $b = \vec{V}$;

$$\frac{d}{dt} \int_{sist} \rho \vec{V} dV = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA. \quad (3.22)$$

Si el flujo es uniforme en la entrada y la salida se puede aplicar la aproximación $\vec{V} = \vec{V}_{prom}$ entonces;

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \sum_{sal} \dot{m} \vec{V}_{prom} - \sum_{ent} \dot{m} \vec{V}_{prom}. \quad (3.23)$$

Se puede igualar la ecuación de las fuerzas que actúan sobre un volumen de control con la ecuación del momento lineal;

$$\int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA. \quad (3.24)$$

La ecuación del momento lineal se puede expresar en forma diferencial aplicando el teorema de divergencia en ambas integrales de superficie. Este teorema también permite aplicarlo a tensores como G_{ij} , que en este caso se sustituye con $(\rho \vec{V})\vec{V}$ para el lado derecho y σ_{ij} para el lado izquierdo;

$$\int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} dV = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) dV. \quad (3.25)$$

Reordenando los términos;

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0. \quad (3.26)$$

Para que se cumpla para cualquier volumen de control sin importar su tamaño, el integrando tiene que ser igual a cero, por tanto;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij}. \quad (3.27)$$

Donde $\vec{V} \vec{V}$ es un producto exterior.

De esta manera se obtiene una ecuación diferencial para la conservación del momento lineal, conocida como ecuación de Cauchy. Manipulando matemáticamente y reordenando la ecuación de Cauchy, se obtiene;

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij};$$

$$\rho \frac{D \vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij}. \quad (3.28)$$

Donde la expresión entre corchetes es la aceleración material, formada por la aceleración local y la convectiva.

Expandiendo la divergencia del tensor de esfuerzos σ_{ij} para la componente x ;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}. \quad (3.29)$$

Con esta ecuación para las tres componentes cartesianas junto con la ecuación de continuidad, resultan poco útiles ya que las tensiones se deberían expresar en función de las variables principales, es decir, densidad, presión y velocidad, para que se pueda resolver el sistema de ecuaciones.

Si el fluido está en movimiento el tensor de esfuerzos σ_{ij} se puede descomponer en el tensor de presión hidrostática i el tensor de esfuerzos viscosos;

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Si el fluido es incompresible la presión se define como presión mecánica $P \approx P_m$, en cambio para flujo compresible la presión es la presión termodinámica (por ejemplo Ley de gas ideal).

$$P_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (3.31)$$

Para el tensor de esfuerzos viscoso se demuestra que;

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (3.32)$$

Donde ε_{ij} es el tensor de deformación.

Entonces sustituyendo el tensor de esfuerzos σ_{ij} desarrollado, en la ecuación de Cauchy se tiene;

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \nabla \cdot 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (3.33)$$

Desarrollando y reordenando los términos acaba resultando la **ecuación de Navier-Stokes** para flujo incompresible con viscosidad constante y Newtoniano;

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}. \quad (3.34)$$

Donde ∇^2 es el operador laplaciano;

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.35)$$

Finalmente para un análisis diferencial de problemas de flujo incompresible, tridimensional y newtoniano, se tienen cuatro variables o incógnitas; la presión P y las tres componentes cartesianas de la velocidad \vec{V} , y cuatro ecuaciones de movimiento; la ecuación de continuidad y las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes.

Como recordatorio, la que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación diferencial y no lineal, donde el termino convectivo $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ es el único término no lineal.

3.6.1. Presión modificada P^*

Se define la presión modificada como;

$$P^* = P + \rho \vec{g} z. \quad (3.36)$$

Donde z se define opuesto a la dirección del vector gravedad. Entonces, se pueden sustituir los términos $\rho \vec{g} - \nabla P$ por el término $-\nabla P^*$;

$$-\nabla P^* = \rho \vec{g} - \nabla P. \quad (3.37)$$

Entonces la ecuación de Navier-Stokes se reduce a;

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P^* + \mu \nabla^2 \vec{V}. \quad (3.38)$$

3.7. Número de Reynolds

El tipo de régimen de flujo depende principalmente de la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas en el fluido. Esta relación se llama número de Reynolds y es una cantidad adimensional.

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}}{\mu \nabla^2 \vec{V}} = \frac{\rho u(u/L)}{\mu(u/L^2)} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}. \quad (3.39)$$

Donde L es la longitud característica de la geometría, donde para un canal se toma el diámetro D , y u es la velocidad promedio del fluido.

Cuando el número de Reynolds es elevado las fuerzas inerciales son dominantes, y se forman fluctuaciones que las fuerzas viscosas no pueden detener, en cambio a números de Reynolds pequeños las fuerzas viscosas dominan el flujo y detienen las perturbaciones.

Generalmente para tuberías circulares, el régimen es laminar para $Re \leq 2300$, turbulento para $Re \geq 4000$ y de transición entre ellos.

3.8. Flujo laminar

El flujo laminar es el movimiento de un fluido que se da a velocidades bajas o viscosidades altas, con la característica de que el movimiento es ordenado y sin perturbaciones a lo largo de las líneas de corriente o trayectorias, las cuales son paralelas entre sí, con la componente normal al flujo nula.

El perfil de velocidad en flujo laminar completamente desarrollado en un canal, es parabólico, con un máximo en el centro i cero en las paredes. El perfil de velocidad se puede expresar como;

$$u(y) = 2V_{prom} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right). \quad (3.40)$$

Donde R es el radio del canal y y la posición en el canal, con el cero en el eje central.

El esfuerzo de corte en flujo turbulento se expresa como;

$$\tau_{lam} = -\mu \frac{du}{dy}. \quad (3.41)$$

3.9. Flujo turbulento y modelos de turbulencia

El flujo turbulento es el movimiento de un fluido que se da a velocidades muy altas o viscosidades muy bajas. A diferencia del flujo laminar, el movimiento es desordenado y con fluctuaciones aleatorias, donde la trayectoria de las partículas forman vórtices de diferentes tamaños. El perfil de velocidad en flujo turbulento completamente desarrollado en un canal, es muchísimo más plano que el perfil parabólico y con una drástica disminución de la velocidad cerca de las paredes. A diferencia del flujo laminar, el perfil de velocidades turbulento no se puede determinar analíticamente por completo, si no que se basan en análisis i mediciones experimentales. Además, el perfil de velocidades se obtiene para la velocidad promediada en el tiempo, en lugar de la instantánea.

Los modelos de turbulencia se basan en la ecuación de Navier-Stokes promediada en el tiempo y en el espacio, llamada ecuación de Navier-Stokes de Reynolds promedio (RANS, siglas en ingles). El concepto de Reynolds promedio se basa en la descomposición de Reynolds, una manipulación matemática que descompone el movimiento instantáneo del flujo en un término promedio y otro término fluctuante.

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + u'(x, t). \quad (3.42)$$

Donde \bar{u} representa el término promedio y u' el término fluctuante. También se aplica a las otras dos componentes de la velocidad v y w , la presión P y el esfuerzo viscoso τ .

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación de Navier-Stokes y después de algunas manipulaciones matemáticas se obtiene la ecuación RANS para flujo turbulento, incompresible y estacionario;

$$\rho \left[\left(\vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{V} \right] = -\nabla \bar{P}^* + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \nabla \cdot \tau_{ij,turb}. \quad (3.43)$$

La \bar{P}^* representa la presión modificada promedio;

$$P^* = P + \rho \vec{g}z. \quad (3.44)$$

Si la comparamos con la ecuación de Navier-Stokes aparece un término adicional llamado esfuerzo de Reynolds $\rho \nabla \cdot \tau_{ij,turb}$ que tiene las mismas dimensiones y se comporta de manera similar al tensor de esfuerzo viscoso. Este término describe las fluctuaciones turbulentas, donde $\tau_{ij,turb}$ es el tensor de esfuerzo específico de Reynolds, el cual añade seis incógnitas más al sistema de ecuaciones.

$$\tau_{ij,turb} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Al añadir estas seis incógnitas el problema se complica ya que no hay relaciones para estas variables, esta situación se conoce como problema de cierre, ya que se tienen más variables que ecuaciones. El esfuerzo de Reynolds no se puede tratar como si fuese un esfuerzo más ya que este no depende de las propiedades del fluido, sino que depende de las características de un flujo en concreto, las cuales son de entrada, desconocidas.

Entonces el esfuerzo de corte en flujo turbulento, se puede ver como la suma de dos componentes, el componente laminar que explica la fricción entre capas en la dirección del flujo y el componente turbulento, que explica la fricción entre las partículas que fluctúan.

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}. \quad (3.46)$$

El esfuerzo de corte turbulento o esfuerzo de Reynolds en dos dimensiones se puede expresar como;

$$\tau_{turb} = -\rho \overline{u'v'}. \quad (3.47)$$

También se puede expresar en función de la viscosidad turbulenta μ_t , la cual no es una propiedad del fluido, sino que depende de las condiciones del flujo;

$$\tau_{turb} = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.48)$$

El objetivo de los modelos de turbulencia es dar solución al problema de cierre que se presenta, calculando el esfuerzo de Reynolds. Los modelos se pueden clasificar en tres categorías; de una ecuación, de dos ecuaciones y el modelo de esfuerzo de Reynolds.

En los modelos de una y dos ecuaciones se añaden una y dos ecuaciones más respectivamente, al sistema de ecuaciones del problema, donde el esfuerzo de Reynolds de la ecuación RANS se modela con una relación lineal constitutiva, según la suposición de Boussinesq.

3.9.1. Modelos de dos ecuaciones; modelo $k - \varepsilon$ y modelo $k - \omega$

En este modelo añade dos ecuaciones de transporte que representan las propiedades del flujo turbulento, resolviendo dos variables; la energía cinética turbulenta k , que determina la energía en la turbulencia, y la razón de disipación de energía cinética ε , que determina la escala de la turbulencia. Debido a la complejidad y la gran cantidad de constantes empíricas que contienen estas dos ecuaciones, la descripción detallada de estas, está fuera de los objetivos de este trabajo, por este motivo no se escribirán.

Para que sea posible resolver el sistema, es necesario especificar otras dos condiciones iniciales adicionales en las entradas, sin embargo, generalmente los valores son inicialmente desconocidos.

Se pueden estimar las variables a partir de la intensidad turbulenta entrante y la longitud de escala turbulenta;

$$I = 0,16 Re^{-\frac{1}{8}}, \quad (3.49)$$

$$l = 0,038 \cdot D_h. \quad (3.50)$$

Algunos códigos de dinámica de fluidos computacional consideran otra escala, basada en la longitud de mezcla l_m

$$l_m = 0,07 \cdot D_h = 0,07 \cdot 2\delta, \quad (3.51)$$

donde D_h corresponde al diámetro hidráulico, comúnmente usado en canales no circulares. D_h se puede aproximar como la distancia entre las paredes 2δ .

$$D_h \equiv 4 \frac{A}{P} \approx 2\delta, \quad (3.52)$$

donde A es el área de la sección transversal del canal y P perímetro mojado del canal.

Una vez se han determinado estas dos propiedades, las variables turbulentas se pueden calcular como;

Energía cinética turbulenta k :

$$k = \frac{3}{2} (\bar{u} l)^2 [m^2/s^2], \quad (3.53)$$

Tasa de disipación de energía cinética turbulenta ε :

$$\varepsilon = C_h \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}. \quad (3.54)$$

Donde C_h es una constante del modelo con valor 0,09.

Para la ε basada en la longitud de mezcla;

$$\varepsilon = C_h^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_m}. \quad (3.55)$$

El modelo $k - \omega$ es similar al $k - \varepsilon$ pero resuelve para la variable de tasa específica de disipación de energía cinética turbulenta ω , que determina la escala de la turbulencia.

La condición inicial para la variable ω se puede obtener a partir de;

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{l}. \quad (3.56)$$

Si está basada en la longitud de mezcla;

$$\omega = C_\mu^{\frac{-1}{4}} \frac{\sqrt{k}}{l_m}. \quad (3.57)$$

3.10. Regiones del flujo turbulento en la capa límite

Para el flujo turbulento se pueden distinguir cuatro regiones a lo largo de la altura del canal;

3.10.1. Subcapa viscosa o laminar

La subcapa viscosa, situada junto a la pared, es la capa más delgada dominada por los efectos viscosos, donde el perfil de velocidad es prácticamente lineal como en el flujo laminar. A pesar de ser la más delgada tiene un efecto muy importante en las características del flujo.

Como el gradiente de velocidad permanece prácticamente constante, el esfuerzo de corte de pared se puede expresar como;

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho \nu \frac{u}{y}; \quad (3.58)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{u}{y}; \quad (3.59)$$

Donde y es la distancia desde la pared y la raíz cuadrada de τ_w/ρ tiene dimensiones de velocidad, por tanto se considera como una velocidad ficticia llamada velocidad de fricción u_τ .

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \quad (3.60)$$

$$u_\tau^2 = \frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{u}{y}; \quad (3.61)$$

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (3.62)$$

Esta ecuación se conoce como Ley de la pared, donde u/u_τ es la velocidad adimensional u^+ y como ν/u_τ tiene dimensiones de longitud, entonces $y u_\tau/\nu$ es la longitud adimensional y^+ . Esta ley es adecuada para $y^+ \leq 5$.

Variables adimensionales;

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad (3.63)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (3.64)$$

Entonces la Ley de la pared queda como;

$$u^+ = y^+. \quad (3.65)$$

3.10.2. Capa de amortiguamiento

La capa de amortiguamiento, situada junto a la subcapa viscosa entre $5 < y^+ < 30$. Aparecen los efectos turbulentos, pero todavía dominada por los efectos viscosos. En esta región ninguna ecuación es precisa para describir el perfil de velocidad.

3.10.3. Capa de transición

En la capa de transición se observa que la velocidad es proporcional al logaritmo de la distancia, y el perfil de velocidad es bastante preciso para $y^+ > 30$ y se puede expresar con la Ley logarítmica;

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B; \quad (3.66)$$

Donde $\kappa = 0,40$ y $B = 5,0$ son constantes obtenidas experimentalmente.

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,0. \quad (3.67)$$

La intersección de la ecuación de la ley logarítmica con la ley de la pared se da en $y^+ = 11$.

3.10.4. Capa turbulenta exterior

Es la capa lejana a las paredes donde predominan los efectos turbulentos. En esta región se obtiene una buena aproximación a partir de;

$$\frac{u_{max} - u}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{R}{R - r}. \quad (3.68)$$

4. Simulación de un flujo a través de un canal

Descripción del problema: Para simular el flujo a través de un canal se han considerado dos tipos de problema, en uno se resuelve un flujo laminar y en el otro un flujo turbulento. Ambos flujos están completamente desarrollados, son incompresibles y estadísticamente estacionarios.

Parámetros del flujo: El único parámetro relevante es el número de Reynolds. Para el problema de flujo laminar se define $Re = 10$, donde el número de Reynolds está basado en la mitad de la altura del canal δ y la velocidad máxima u_{max} , es decir, $Re = \rho u_{max} \delta / \mu$. Para simplificar los cálculos, se ha considerado un fluido ideal con densidad $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, viscosidad dinámica $\mu = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, velocidad máxima $u_{max} = 1 \text{ m/s}$ y la mitad de la altura del canal $\delta = 1 \text{ m}$.

Para el problema de flujo turbulento se han definido tres casos, $Re_\tau = 1000$ ($Re = 39.578$), $Re_\tau = 2000$ ($Re = 87.002$) y $Re_\tau = 5200$ ($Re = 257.687$), donde Re_τ está basado en la mitad de la altura del canal δ y la velocidad de fricción u_τ , es decir, $Re_\tau = \rho u_\tau \delta / \mu$, y Re está basado en la altura del canal 2δ y la velocidad media \bar{u} , es decir, $Re = 2\rho\bar{u}\delta/\mu$. Para simplificar los cálculos, se ha considerado un fluido ideal con densidad $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, velocidad media $\bar{u} = 1 \text{ m/s}$ y la altura del canal $2\delta = 2 \text{ m}$.

Estos tres casos de flujo turbulento ya fueron resueltos a partir de una simulación numérica directa (DNS) por Myoungkyu Lee y Robert D. Moser (2015) [3], de esta manera se pueden comparar los resultados numéricamente obtenidos sin aplicar ningún modelo de turbulencia, con los del modelo $k - \varepsilon$ utilizado en este caso.

Variables del problema: Las variables disponibles son; la presión y las tres componentes cartesianas de la velocidad. Para el problema de flujo turbulento se añaden dos variables más, la energía cinética turbulenta k y la tasa de disipación de energía cinética turbulenta ε .

Geometría y resolución de la malla: El flujo desarrollado circula a través de un canal formado por dos placas planas paralelas entre sí, separadas una distancia 2δ . Al resolver el problema en 2 dimensiones se puede considerar cómo un canal de ancho infinito. Para asegurar que el flujo se desarrolla completamente se aplican condiciones de contorno periódicas en la entrada y salida del canal, de esta manera se tiene la equivalencia a un canal de longitud infinita.

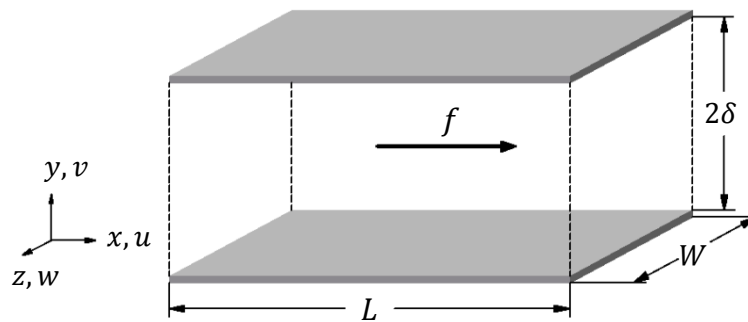


Figura 4.1. Configuración y dimensiones del canal.

Para los dos tipos de problemas, el dominio está formado por un rectángulo de $2\delta \times 4\delta$, con una malla estructurada de 40 divisiones a lo largo y ancho, con los elementos concentrados en las paredes del canal por un factor de 0,3 en cada pared. Estos parámetros del tamaño de la malla fueron calculados aproximadamente para obtener una $y^+ = 50$ para el caso más desfavorable, es decir, el caso con el número de Reynolds más elevado, $Re_\tau = 5200$.

Para resolver el problema turbulento se utiliza una aproximación de función de pared, en concreto la ley de pared de Reichardt, donde se define la distancia de pared o anchura de capa λ . Para el caso $Re_\tau = 5200$ se resuelven dos λ distintas, calculadas a partir de $y^+ = 50$ y $y^+ = 80$, de esta manera se puede observar cómo se comporta el modelo $k - \varepsilon$ en función de la distancia de pared, en los otros dos casos solo para $y^+ = 50$. Como el problema se resuelve a partir de una distancia λ de la pared, el dominio computacional se tendrá que acortar una distancia igual a λ en las dos paredes. Entonces el dominio computacional estará formado por un rectángulo de $2(\delta - \lambda) \times 4\delta$.

En el problema de flujo laminar, el eje de coordenadas se sitúa en el centro del canal y para el problema de flujo turbulento, se sitúa en la pared inferior. En ambos problemas se ha tomado $\delta = 1$ m.

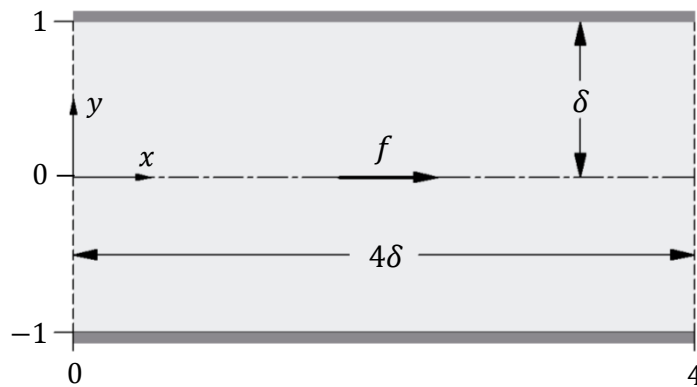


Figura 4.2. Configuración y dimensiones del canal para el problema laminar.

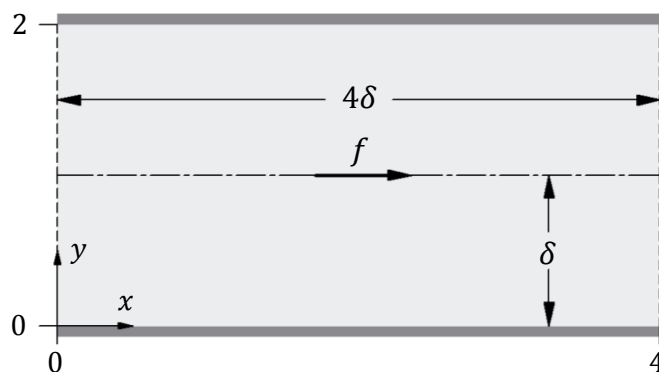


Figura 4.3. Configuración y dimensiones del canal para el problema turbulento.

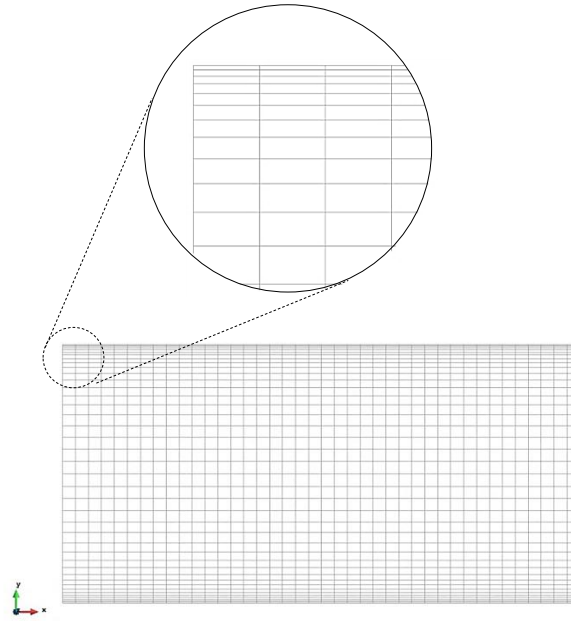


Figura 4.4. Malla del canal y detalle de los elementos concentrados en la pared.

Para el caso de $Re_\tau = 1000$ se ha resuelto el mismo problema sin condiciones periódicas, desarrollando el flujo a través de un canal de longitud 40δ , para comprobar que los resultados dan lo mismo. La longitud de entrada hidrodinámica L_h para flujo turbulento se puede aproximar como [4 p. 327];

$$L_{h,turbulento} \approx 1,359 D Re^{\frac{1}{4}} = 1,359 \cdot 2\delta \cdot (39.578)^{\frac{1}{4}} = 38,34\delta \, m \approx 40\delta \, m \quad (4.1)$$

Resolver el problema de esta manera no es adecuado, ya que al no tener condiciones periódicas es necesario definir las condiciones de contorno en la entrada y la salida del canal. Para la entrada se ha de definir un perfil de velocidades que inicialmente es desconocido, además se está condicionando el problema según las condiciones que se apliquen. Si aplicamos un perfil de velocidades plano o constante, en lugar de parabólico, se necesitará menos distancia para que el flujo se desarrolle, ya que el perfil turbulento es un poco más plano en la zona central. De esta manera también, se debe calcular la distancia para la cual el flujo estará completamente desarrollado.

Régimen del flujo	Re_τ	Re	y^+	λ	Dominio computacional
Laminar	-	10	-	-	$2\delta \times 4\delta$
Turbulento	1000	39.578	50	0,05	$(1,95 - 0,05)\delta \times 4\delta$
Turbulento	2000	87.002	50	0,02	$(1,98 - 0,02)\delta \times 4\delta$
Turbulento	5200	257.687	50	0,008	$(1,992 - 0,008)\delta \times 4\delta$
			80	0,01	$(1,99 - 0,01)\delta \times 4\delta$

Tabla 4.1. Parámetros de la simulación para todos los casos simulados.

4.1. Flujo de régimen laminar

Características del flujo: El flujo presenta las características habituales del flujo en la capa límite, es decir, la condición de no deslizamiento, que requiere que la componente tangencial de la velocidad sea igual a la de la superficie, y la condición de que la velocidad normal a la superficie sea igual que la de la superficie. En este caso son nulas, ya que las superficies están en reposo.

Para conducir el flujo se aplica una fuerza de volumen al fluido. El uso de una fuerza de volumen, es una solución para evitar problemas con la definición del perfil de velocidades en la entrada del canal, inicialmente desconocido, evitando también condicionar el resultado del problema. Otra opción igual de válida, es aplicar un gradiente de presiones entre la entrada y la salida.

En Elmer, la fuerza está definida como fuerza por unidad de volumen $\vec{f} = \rho \vec{g}$, donde para este caso es $f = 0.2 \text{ N/m}^3$ en la dirección x . Para determinarla se ha calculado a partir de;

$$F = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

Procedimiento numérico: Las ecuaciones fundamentales son; la ecuación de continuidad (3.17) y la ecuación de Navier-Stokes (3.34).

Condiciones iniciales y condiciones de contorno: En las dos paredes del canal se les aplica la condición de no deslizamiento. Para lograr la equivalencia a un canal de longitud infinita, se aplican condiciones de contorno periódicas en la entrada y salida del canal, para las velocidades y la presión, de esta manera se evitan los problemas asociados con las condiciones de contorno en la entrada y la salida, es decir, no es necesario definir un perfil de velocidades en la entrada, ya que toma el valor de la salida.

Como el flujo es estadísticamente estacionario y tiene condiciones de contorno periódicas en la dirección del flujo, las condiciones iniciales no son relevantes.

Determinación de la fuerza de volumen: Para determinar la fuerza de volumen \vec{f} , es necesario definir la función del perfil de velocidades. Sabiendo que se trata de un flujo laminar con la entrada del canal entre -1 y 1 m, se define una función parabólica con dominio [-1 y 1].

$$\begin{aligned} u(y) &= -C(y-1)(y+1); \\ &= -C(y^2 - 1) \\ \forall y &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

La velocidad máxima se da en el centro del canal y es igual a la unidad

$$u_{max} = u(0) = C = 1 \text{ m/s.}$$

La fuerza para flujo laminar se expresa como

$$F = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

donde la primera derivada de la función del perfil de velocidades es

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2 C y,$$

y la segunda derivada de la función del perfil de velocidades es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 C.$$

Finalmente se tiene que

$$\vec{f} = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \mu C = 2 \cdot 0.1 \cdot 1 = 0.2 \text{ N/m}^3.$$

4.2. Flujo de régimen turbulento

Características del flujo: Igual que el flujo laminar, presenta las características habituales del flujo en la capa límite, es decir, la condición de no deslizamiento y la condición de que la velocidad normal a la superficie sea igual que la de la superficie. En este caso para resolver el problema se utilizará el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$, el cual es principalmente valido para números de Reynolds elevados y en zonas lejanas de las paredes, independientemente de la resolución de la malla en la capa límite, por este motivo no se puede aplicar directamente la condición de no deslizamiento. Para que el modelo sea apropiado, se recurre a las funciones de pared, este procedimiento se basa en utilizar la ley de la pared para determinar los valores de la velocidad, la k y la ε en los puntos más próximos a la pared. La función de pared se aplica en los puntos a una distancia λ respecto a la superficie, que se determina dependiendo de la y^+ esperada.

Para conducir el flujo se aplica una fuerza de volumen al fluido. Al igual que el problema laminar, se puede aplicar un gradiente de presiones entre la entrada y la salida en lugar de la fuerza.

Para cada caso del problema con un número de Reynolds distinto, se ha calculado la fuerza de volumen correspondiente a aplicar. Para $Re_\tau = 1000$ se aplica una fuerza $\vec{f} = 0.00255 \text{ N/m}^3$, para $Re_\tau = 2000$, $\vec{f} = 0.00211 \text{ N/m}^3$, y para $Re_\tau = 5200$, $\vec{f} = 0.00163 \text{ N/m}^3$.

Procedimiento numérico: Este problema se resuelve con el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$. Las ecuaciones fundamentales son; la ecuación de continuidad (3.17), la ecuación de Navier-Stokes (3.34) y las dos ecuaciones de transporte adicionales del modelo $k - \varepsilon$.

Condiciones iniciales y condiciones de contorno: A pesar de que el flujo es estadísticamente estacionario, se definen condiciones iniciales próximas al resultado para agilizar la convergencia

del problema. Como condiciones iniciales se definen las dos variables del modelo $k - \varepsilon$, recogidos en la Tabla 4.2, y las componentes de la velocidad $u = 1$ m/s y $v = 0$ m/s en la ecuación de Navier-Stokes, para que el problema no parta del reposo y tarde menos en converger.

Como condiciones de contorno, en las dos paredes del canal se les aplica la aproximación de función de pared, la ley de pared de Reichardt, con una distancia de pared λ definida en la Tabla 4.1. Para la ecuación de Navier-Stokes se define $v = 0$ m/s, para asegurar la condición de que la velocidad normal a la superficie sea igual a cero.

Para lograr la equivalencia a un canal de longitud infinita, se aplican condiciones de contorno periódicas en la entrada y salida del canal, para las velocidades, la presión y las dos variables del modelo $k - \varepsilon$, de esta manera se evitan los problemas asociados con las condiciones de contorno en la entrada y la salida.

Re_τ	Re	μ	u_τ	f_x	k	ε
1.000	39.578	5,05E-05	0,0505	0,00255	0,00272	0,000168
2.000	87.002	2,30E-05	0,0460	0,00211	0,00224	0,000125
5.200	257.687	7,76E-06	0,0404	0,00163	0,00170	8,33E-05

Tabla 4.2. Parámetros y constantes de la simulación para todos los casos simulados.

Determinación de u_τ y Re a partir de Re_τ : Los cálculos descritos a continuación se han resuelto para cada número de Reynolds, como ejemplo, solo se ha desarrollado para el caso $Re_\tau = 1000$.

Partiendo de $Re_\tau = 1000$ se puede obtener una buena aproximación del número de Reynolds Re a partir de [5 p. 279];

$$Re_\tau \approx 0,09Re^{0,88}, \quad (4.3)$$

$$Re \approx \left(\frac{Re_\tau}{0,09} \right)^{\frac{1}{0,88}} = \left(\frac{1000}{0,09} \right)^{\frac{1}{0,88}} = 39.577,80;$$

Para simplificar los cálculos, se ha considerado un fluido ideal con densidad $\rho = 1$ kg/m³, altura del canal $2\delta = 2$ m y velocidad media $\bar{u} = 1$ m/s, donde

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u \, dy. \quad (4.4)$$

Con las constantes definidas, hallamos la viscosidad del fluido para obtener $Re = 39.577,80$;

$$Re = \frac{\rho \bar{u} 2\delta}{\mu}; \quad (4.5)$$

$$\mu = \frac{\rho \bar{u} 2\delta}{Re} = \frac{2}{39.577,80} = 5,053 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

La velocidad de fricción u_τ se obtiene despejando la variable de

$$Re_\tau = \frac{\rho u_\tau \delta}{\mu}; \quad (4.6)$$

$$u_\tau = \frac{Re_\tau \mu}{\rho \delta} = \frac{1000 \cdot 5,053 \cdot 10^{-5}}{1} = 0,0505 \text{ m/s}.$$

Determinación de la distancia de pared λ : Se ha desarrollado a modo de ejemplo para una $y^+ = 50$ para el caso de $Re_\tau = 1000$;

Calculamos el coeficiente de fricción C_f ;

$$C_f = \frac{0,026}{Re^{1/7}} = \frac{0,026}{(39,578)^{1/7}} = 0,005731. \quad (4.7)$$

Calculamos la tensión de corte en la pared τ_{wall} ;

$$\tau_{wall} = \frac{C_f \rho \bar{u}^2}{2} = 0,002866 \text{ N/m}^2. \quad (4.8)$$

Calculamos la velocidad de fricción u_τ ;

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}} = 0,05354 \text{ m/s}. \quad (4.9)$$

Finalmente despejamos la distancia de pared λ de la definición de y^+ ;

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau \lambda}{\mu}; \quad (4.10)$$

$$\lambda = \frac{y^+ \mu}{u_\tau \rho} = 0,0467 \approx 0,05 \text{ m}.$$

Determinación de la fuerza de volumen: Para determinar la componente x de la fuerza de volumen f se igualan las fuerzas de presión con las fuerzas de corte;

$$\sum F_p = \sum F_\tau; \quad (4.11)$$

$$\Delta P(w2\delta) = 2\tau_w(wL);$$

$$\Delta P\delta = \tau_w L;$$

$$f = \frac{F}{V} = \frac{\Delta P}{L} = \frac{\tau_w}{\delta} \equiv \left[\frac{N}{m^3} \right]. \quad (4.12)$$

Conociendo la velocidad de fricción i la densidad se puede obtener la tensión cortante a partir de

$$\tau_w = \rho u_\tau^2. \quad (4.13)$$

Finalmente;

$$f = \frac{\tau_w}{\delta} = \frac{\rho u_\tau^2}{\delta} = \frac{0,0505^2}{1} = 0,00255 \text{ N/m}^3. \quad (4.14)$$

Determinación de la condición inicial para las variables turbulentas k y ε :

Antes de calcular el valor de las variables turbulentas se ha de determinar la intensidad de turbulencia I y la escala de longitud turbulenta l ;

$$I = 0,16 Re^{-\frac{1}{8}} = 0,16(39.577,80)^{-\frac{1}{8}} = 0,0426, \quad (4.15)$$

$$l = 0,038 \cdot D_h = 0,038 \cdot 2\delta = 0,076 \text{ m}. \quad (4.16)$$

Algunos códigos de dinámica de fluidos computacional consideran otra escala, basada en la longitud de mezcla l_m

$$l_m = 0,07 \cdot D_h = 0,07 \cdot 2\delta = 0,14 \text{ m}, \quad (4.17)$$

donde D_h corresponde al diámetro hidráulico, comúnmente usado en canales no circulares. D_h se puede aproximar a la distancia entre las paredes 2δ .

$$D_h \equiv 4 \frac{A}{P} \approx 2\delta, \quad (4.18)$$

donde A es el área de la sección transversal del canal y P perímetro mojado del canal.

Finalmente calculamos la energía cinética turbulenta k ;

$$k = \frac{3}{2} (\bar{u} I)^2 = \frac{3}{2} (0,0426)^2 = 0,002723 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad (4.19)$$

y la tasa de disipación de energía cinética turbulenta ε ;

$$\varepsilon = C_h \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} = 0,09 \frac{(0,002723)^{\frac{3}{2}}}{0,076} = 0,0001682, \quad (4.20)$$

donde C_h es una constante del modelo con valor 0,09.

Para la ε basada en la longitud de mezcla;

$$\varepsilon = C_h^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_m} = (0,09)^{\frac{3}{4}} \frac{(0,002723)^{\frac{3}{2}}}{0,14} = 0,0001668. \quad (4.21)$$

4.3. Resultados de las simulaciones

Resultados del problema de flujo laminar $Re = 10$: El perfil de velocidades resultante es un perfil parabólico con velocidad máxima igual a uno en el centro del canal.

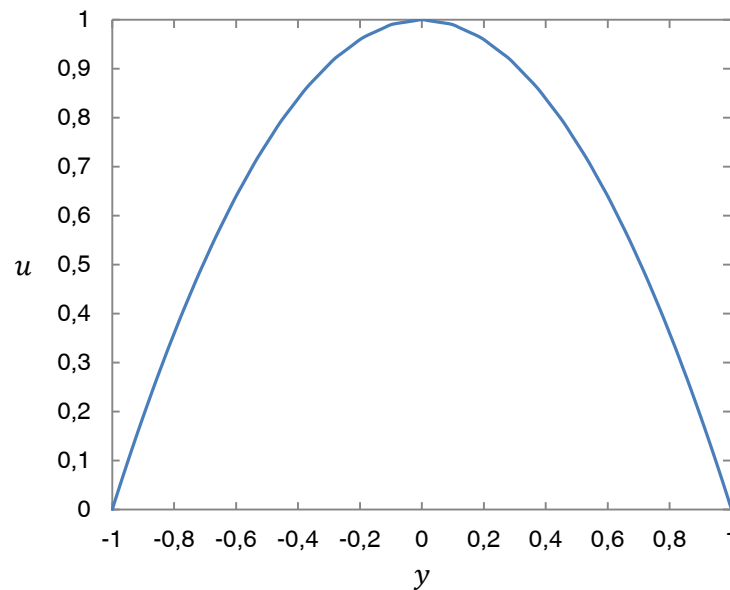


Figura 4.5. Perfil de velocidades para $Re = 10$.

Dibujando el perfil de velocidades analítico y el obtenido a partir de los resultados del problema ejecutado con Elmer, se puede ver que coinciden perfectamente. El error que hay entre las dos funciones es de 0,0017.

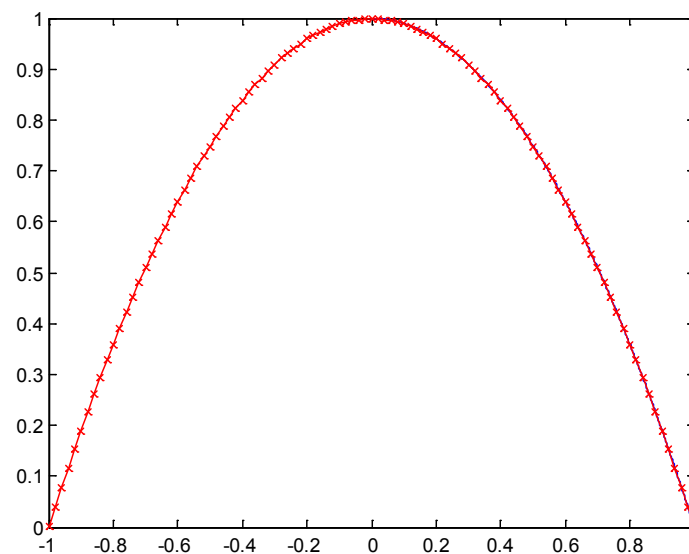


Figura 4.6. Función parabólica respecto el perfil de velocidades obtenido.

Resultados del problema de flujo turbulento: A continuación se representan los resultados con *ParaView* para el campo de velocidades y energía cinética turbulenta, para el caso $Re_\tau = 5200$ y el caso del canal largo sin condiciones periódicas de $Re_\tau = 1000$. No se han representado los demás casos ya que visualmente son muy parecidos y observar los resultados a partir de una escala de colores no aporta información precisa. Para apreciar bien los resultados se representan las gráficas a partir de los datos de un corte en la sección, perpendicular a las paredes. Se ha comprobado que los resultados son independientes de donde se elija el corte. Para el canal de 40 m sin condiciones periódicas sí que importa la posición del corte, ya que el flujo se desarrolla a lo largo del canal.

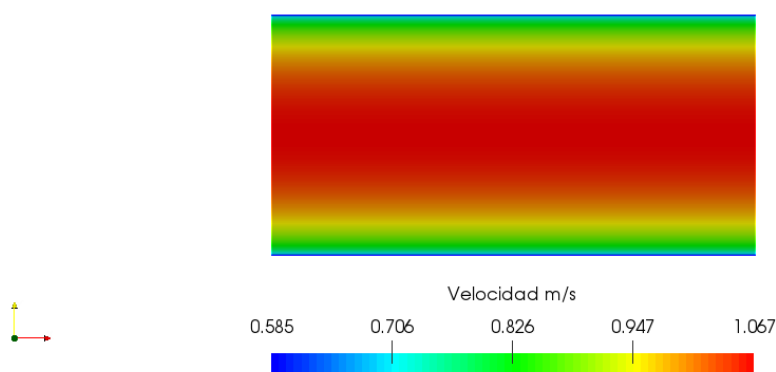


Figura 4.7. Resultado de la variable velocidad para todo el dominio computacional. Caso $Re_\tau = 5200$.

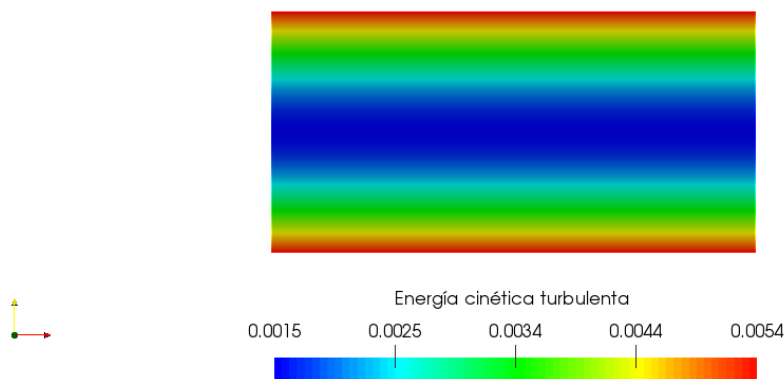


Figura 4.8. Resultado de la energía cinética turbulenta k para todo el dominio computacional. Caso $Re_\tau = 5200$.

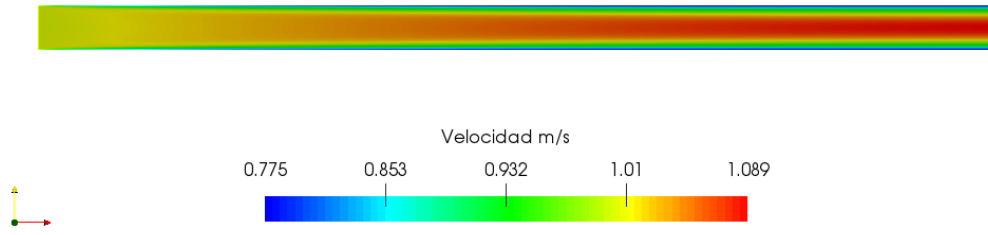


Figura 4.9. Resultado de la variable velocidad para todo el dominio computacional. Caso $Re_\tau = 1000$, canal de 2×40 m sin condiciones periódicas, con perfil plano en la entrada.

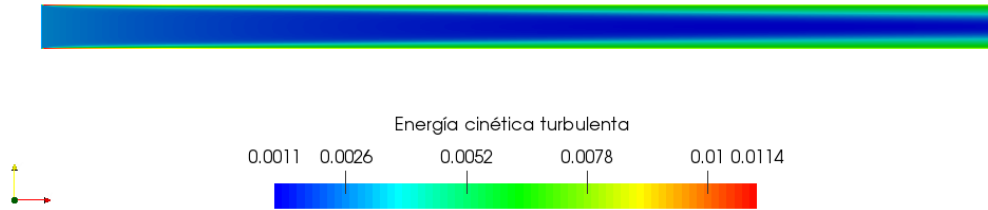


Figura 4.10. Resultado de la energía cinética turbulenta k para todo el dominio computacional. Caso $Re_\tau = 1000$.

Para las gráficas siguientes las curvas en color azul corresponden a la representación de los resultados extraídos de las simulaciones numéricas directas de Myoungkyu Lee y Robert D. Moser (2015) [3], los demás colores forman parte de esta simulación. Los ejes con superíndice $^+$ están normalizados por u_τ , es decir;

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad (4.22)$$

$$y^+ = \frac{\rho \delta u_\tau}{\mu}, \quad (4.23)$$

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}. \quad (4.24)$$

A modo de ejemplo visual, el primer caso se ha representado el perfil de velocidades para toda la altura del canal, para los demás casos solo se representará la mitad, ya que los resultados son simétricos.

Caso $Re_\tau = 1000$:

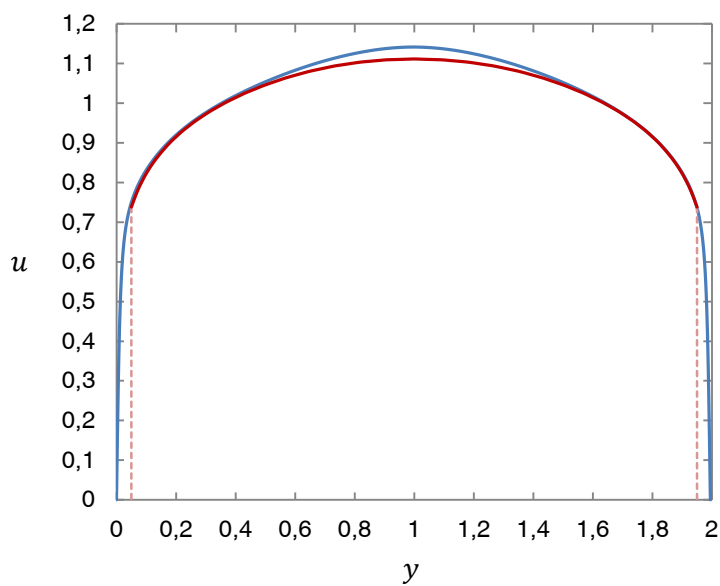


Figura 4.11. Comparación de los perfiles de velocidades en toda la altura del canal.

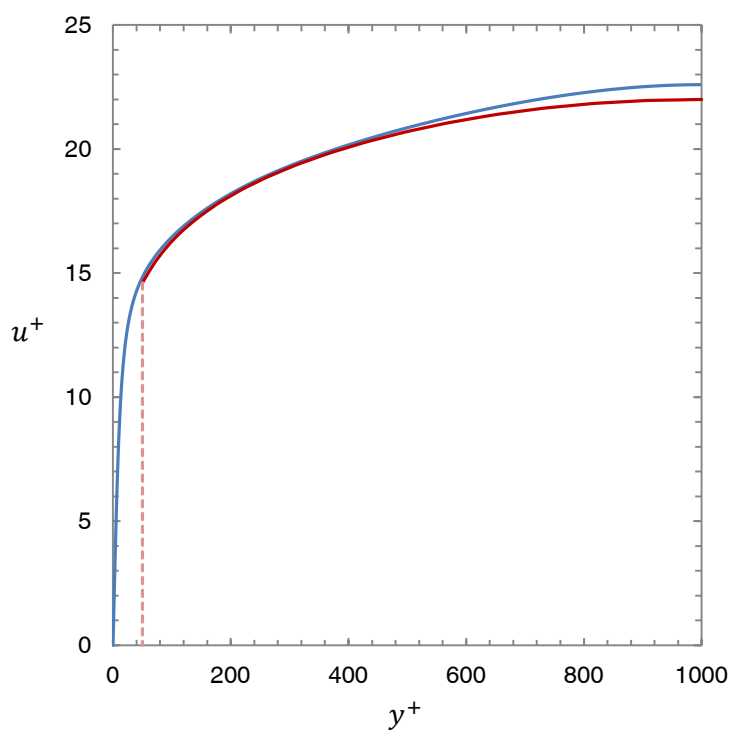


Figura 4.12. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales.

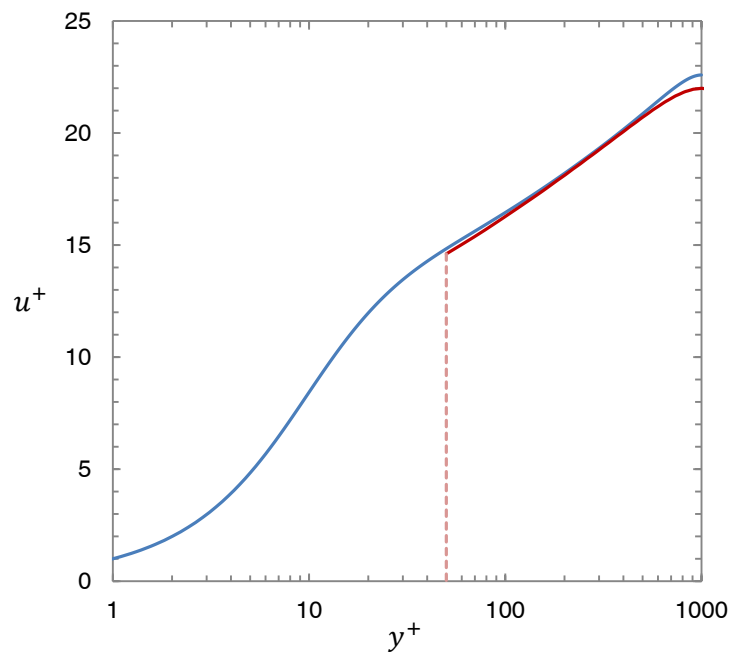


Figura 4.13. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales y escala logarítmica.

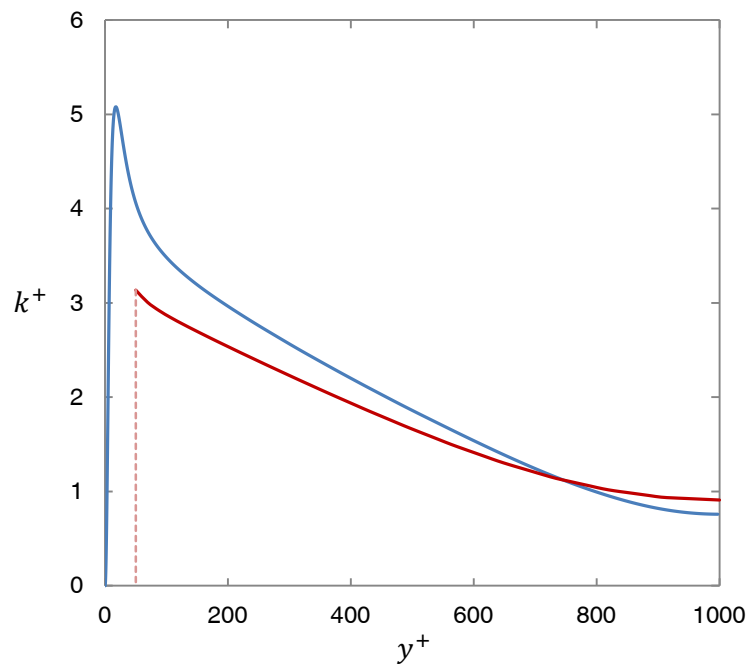


Figura 4.14. Comparación de los perfiles de k en unidades adimensionales.

Se puede observar que los perfiles de velocidades de la Figura 4.11, Figura 4.12 y Figura 4.13, se aproximan bastante bien a los resultados obtenidos por (DNS), en cambio el perfil de k tiene una mayor desviación a medida que se aproxima a la pared.

Caso $Re_\tau = 2000$:

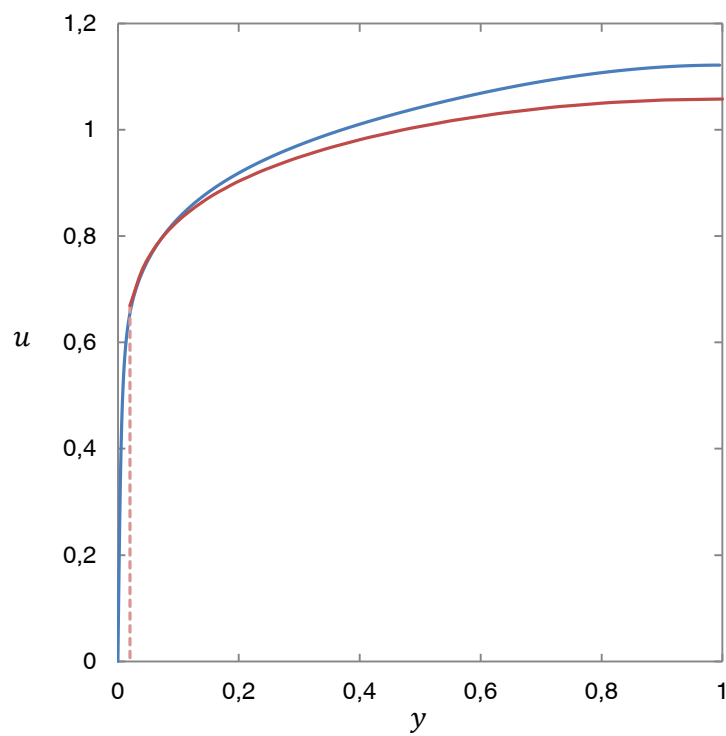


Figura 4.15. Comparación de los perfiles de velocidades.

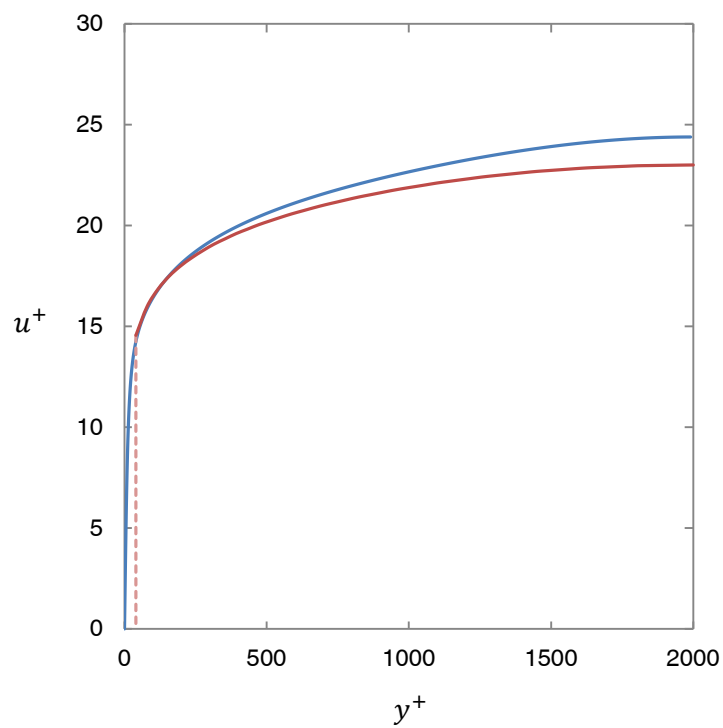


Figura 4.16. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales.

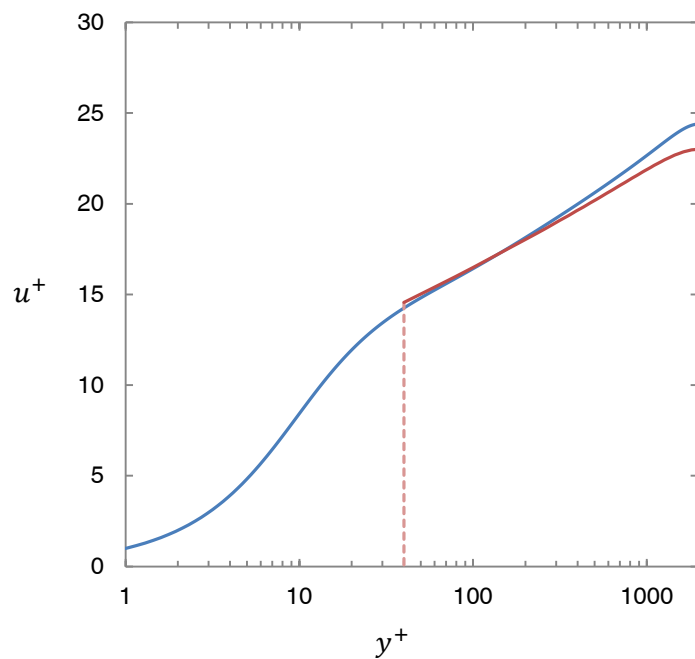


Figura 4.17. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales y escala logarítmica.

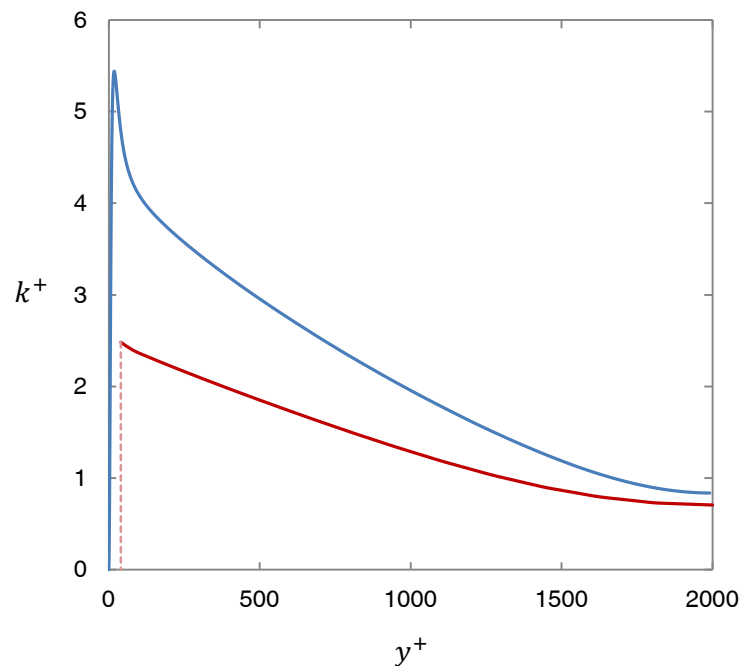


Figura 4.18. Comparación de los perfiles de k en unidades adimensionales.

Se puede observar que los perfiles de velocidades de la Figura 4.15, Figura 4.16 y Figura 4.17 se aproximan bastante bien a los resultados obtenidos por (DNS) en la pared y se desvía en el centro del canal, para el perfil de k se aprecia una gran desviación.

Caso $Re_\tau = 5200$:

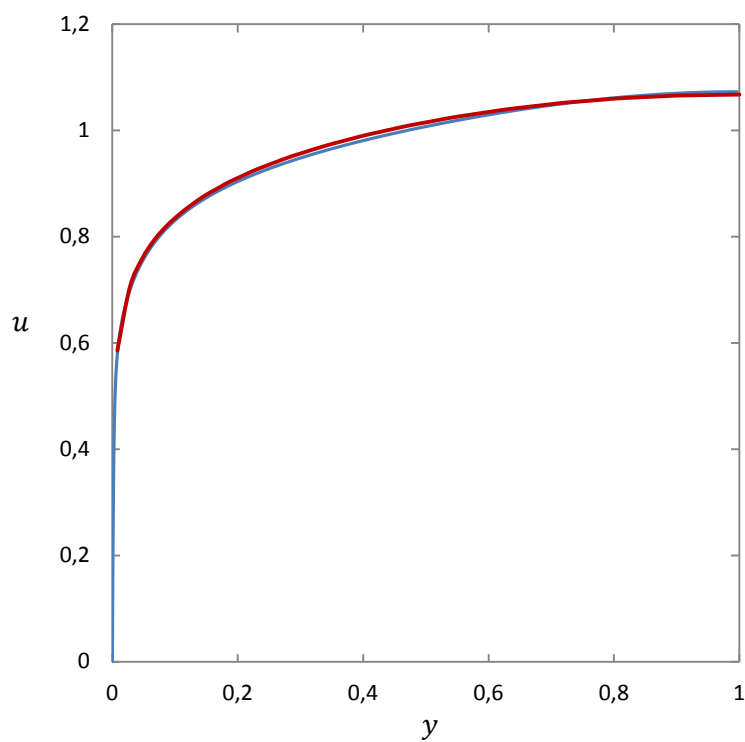


Figura 4.19. Comparación de los perfiles de velocidades.

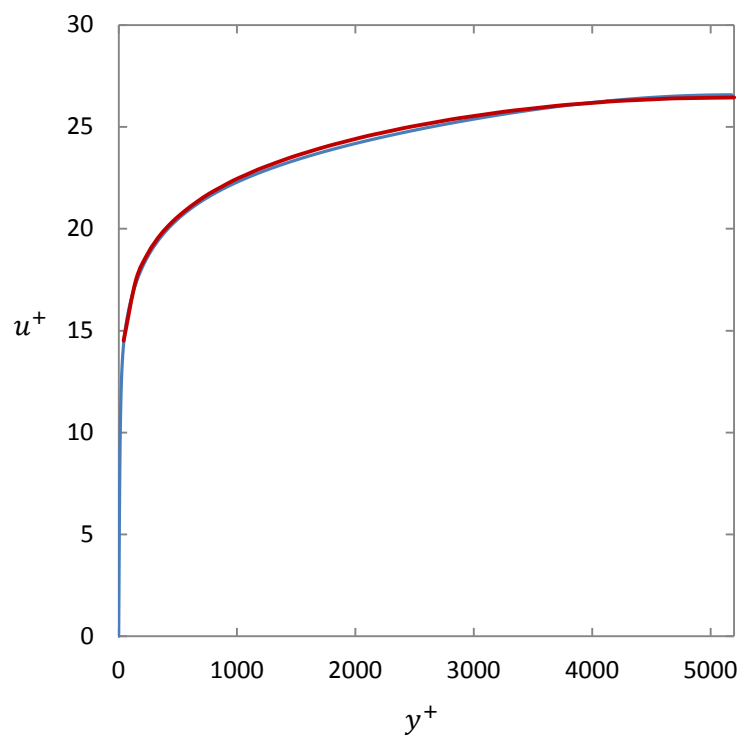


Figura 4.20. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales.

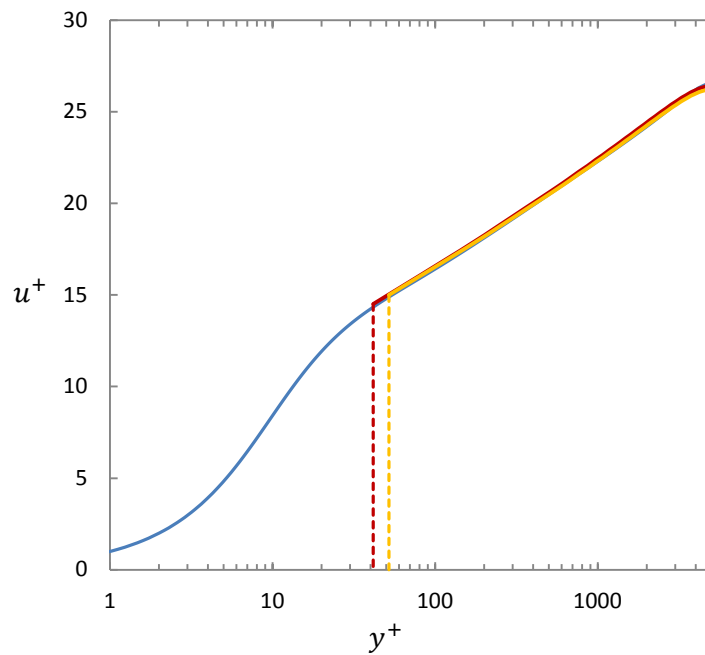


Figura 4.21. Comparación de los perfiles de velocidades en unidades adimensionales y escala logarítmica. En amarillo corresponde a $y^+ = 80$, y en rojo a $y^+ = 50$.

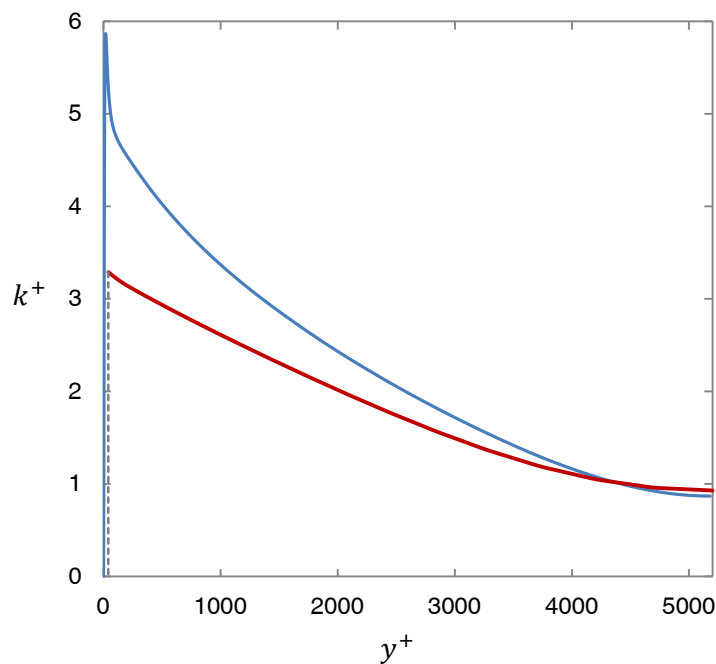


Figura 4.22. Comparación de los perfiles de k en unidades adimensionales.

Para la Figura 4.19 y la Figura 4.20, solo se ha representado $y^+ = 50$, ya que los resultados para $y^+ = 80$ son prácticamente idénticos. Se puede observar que los perfiles de velocidades de la Figura 4.19, Figura 4.20 y Figura 4.21, se aproximan perfectamente a los resultados obtenidos por (DNS), en cambio el perfil de k tiene una mayor desviación a medida que se aproxima a la pared.

5. Simulación del intercambiador de calor

Descripción del problema: Antes de realizar la simulación, previamente se ha hecho un ensayo experimental con el intercambiador de calor del laboratorio para una apertura de válvula del 100%, de esta manera los datos obtenidos a partir de la simulación se pueden comparar con los tomados empíricamente, y comprobar su validez. Para simular el flujo a través del intercambiador de calor se han ajustados los parámetros para tener las mismas condiciones del ensayo realizado en el laboratorio. El flujo simulado es un flujo de aire turbulento completamente desarrollado, incompresible y estadísticamente estacionario.

Como se desconoce el perfil de velocidades en el canal de aspiración, se ha decidido colocar dos reservorios en la entrada y la salida lo suficientemente grandes como para disolver las turbulencias, y conducir el flujo a partir de un gradiente de presiones entre la entrada y la salida de estas. Para que el flujo quede completamente desarrollado se aplican condiciones periódicas entre la entrada-salida de los reservorios.

El problema se resuelve a partir del modelo de turbulencia $k - \varepsilon$. Para tener una estimación de la condición inicial, se ha hecho una primera simulación con la aproximación de flujo de Stokes sin aplicar la ley de pared ni modelos de turbulencia. Esta aproximación se aplica para flujos en los que el número de Reynolds es tan pequeño que los términos viscosos dominan sobre los términos inerciales, de modo que el término de aceleración no-estacionario y el término convectivo se elimina. Además los efectos gravitacionales son despreciables, de esta manera se simplifica la ecuación de Navier-Stokes y es más fácil de resolver. Aunque el flujo del problema es turbulento, con esta aproximación se obtiene una mejor condición inicial que si se aplicase una con un único valor para todo el dominio computacional.

Parámetros del flujo: Los únicos parámetros relevantes son el número de Reynolds y la presión. Se define $Re = 58.721$, donde el número de Reynolds está basado en la mitad de la altura del canal δ y la velocidad máxima u_{max} , es decir, $Re = \rho u_{max} \delta / \mu$. Donde la densidad del aire es $\rho = 1,195 \text{ kg/m}^3$, la viscosidad dinámica $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, la mitad de la altura del canal $\delta = 0,125/2 \text{ m}$ y la velocidad máxima en el canal de aspiración antes de llegar a los tubos $u_{max} = 14,31 \text{ m/s}$. La presión se ha definido como $P_1 = 1000 \text{ Pa}$ en la entrada y cero en la salida. Se ha llegado a esta presión a partir de iteraciones hasta alcanzar el Reynolds deseado. La presión para el flujo de Stokes se encuentra en la Tabla 5.1.

ΔP	ΔP en flujo de Stokes
1000	1,5

Tabla 5.1. Parámetros de la simulación para los dos casos simulados.

Variables del problema: Las variables disponibles son; la presión, las tres componentes cartesianas de la velocidad y las dos variables turbulentas; la energía cinética turbulenta k y la tasa de disipación de energía cinética turbulenta ε .

Geometría y resolución de la malla: El dominio está formado por la geometría que aparece en la Figura 5.1, cuyas dimensiones han sido tomadas a partir del trabajo final de grado de Martí Riera, que corresponden a las medidas del intercambiador de calor del laboratorio. El eje de coordenadas se sitúa en el centro de la entrada del reservorio, por tanto tiene simetría respecto al eje x .

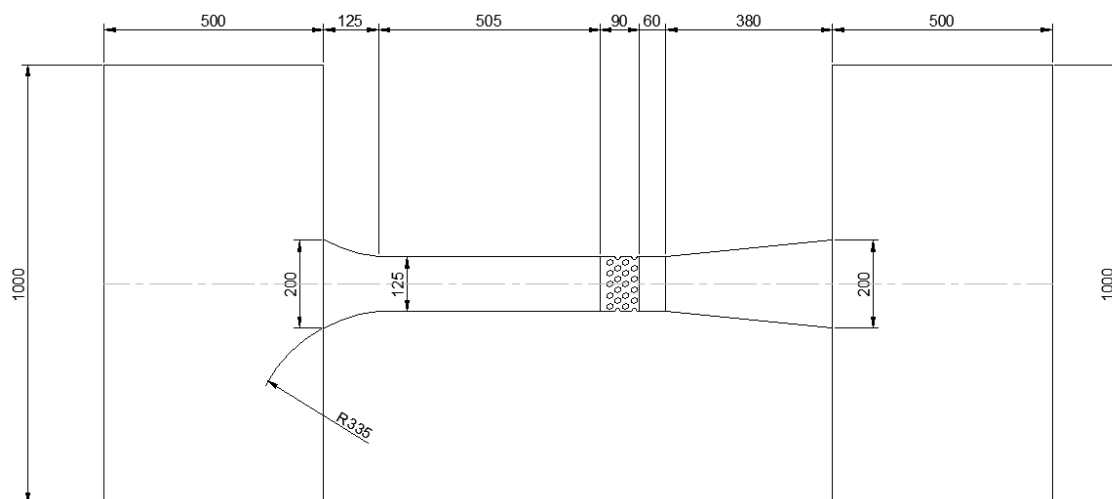


Figura 5.1. Geometría y dimensiones en mm del intercambiador de calor con los reservorios.

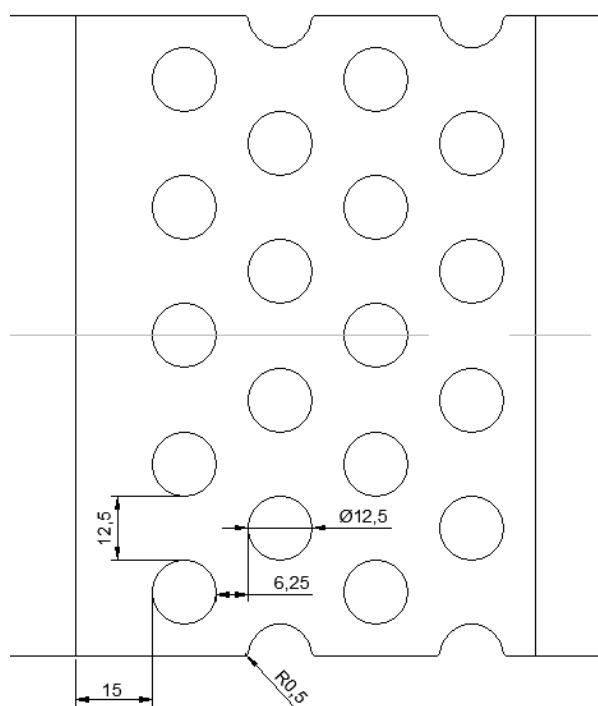


Figura 5.2. Detalle de la disposición de los cilindros y dimensiones en mm.

El dominio se ha dividido en 6 regiones para poder asignar diferentes configuraciones de malla para cada región. Las regiones son las siguientes;

- R1: Corresponde al reservorio de entrada del canal de aspiración y es lo suficientemente grande como para disolver las turbulencias del reservorio de salida antes de entrar al canal. La malla requerida no ha de ser muy pequeña, aunque ha de estar refinada en las paredes de la región.
- R2: Corresponde a la tobera y el canal de aspiración, tampoco requiere una malla muy fina aunque menor que la de los reservorios ya que en esta región se dibujará el perfil de velocidades. Como a lo largo del canal no varían mucho los valores, la malla será más densa a lo ancho que a lo largo, con refinamiento en las paredes de la región.
- R3: Corresponde a la zona de tubos, en esta región la malla ha de ser muy fina ya que es donde el aire colisiona con los tubos generando inestabilidades y donde hay un cambio drástico en el gradiente de velocidades
- R4: Corresponde a la región previa al difusor y es donde se generan las turbulencias, por tanto la malla requerida es similar a la región R3.
- R5: Corresponde al difusor y la malla será un poco mayor que la región previa y similar a la R2.
- R6: Corresponde al reservorio de salida y se encargará de disolver las turbulencias generadas con una malla igual al otro reservorio.

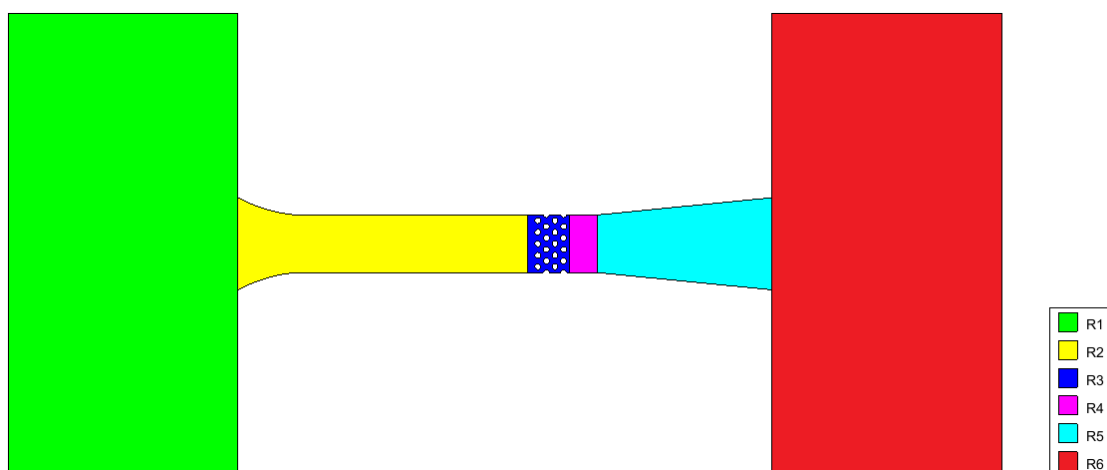


Figura 5.3. Numeración de las regiones.

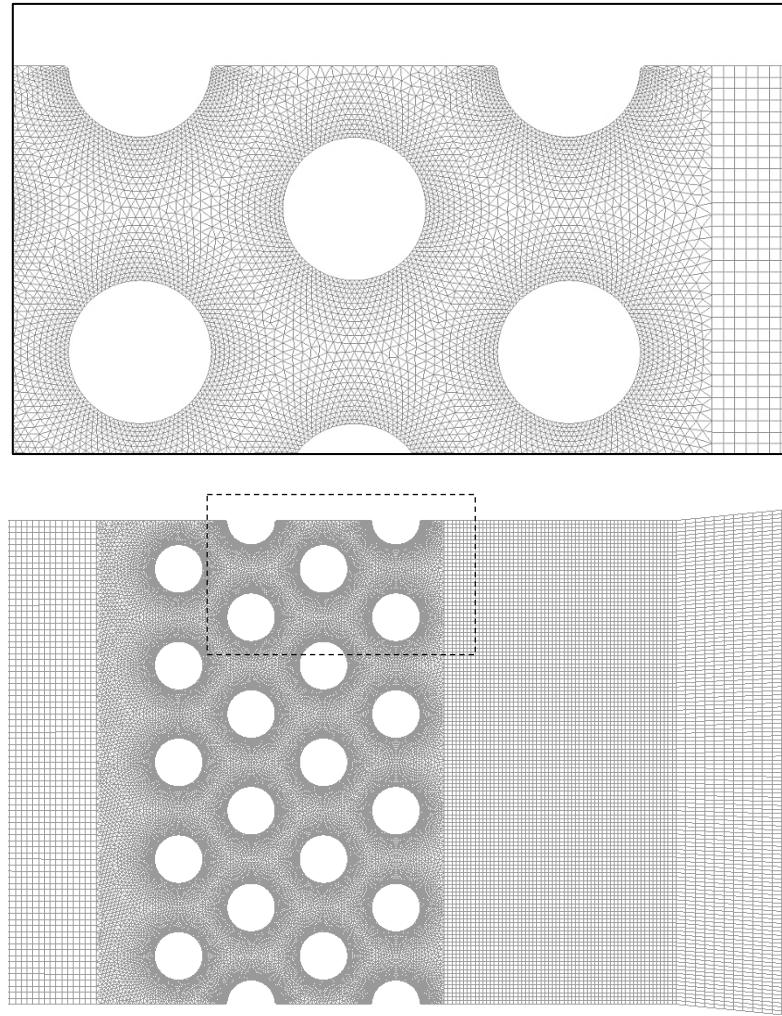


Figura 5.4. Malla del intercambiador de calor y detalle de los elementos concentrados en los tubos.

Características del flujo: El flujo presenta las características habituales del flujo en la capa límite, es decir, la condición de no deslizamiento y la condición de que la velocidad normal a la superficie sea igual que la de la superficie. En este caso para resolver el problema se utilizará el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ con funciones de pared igual que se hizo en el problema del flujo a través de un canal.

Para generar el movimiento del flujo se aplica un gradiente de presiones entre la entrada y la salida de los reservorios, con condiciones periódicas entre ellas.

Procedimiento numérico: Este problema se resuelve con el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$. Las ecuaciones fundamentales son; la ecuación de continuidad (3.17), la ecuación de Navier-Stokes (3.34) y las dos ecuaciones de transporte adicionales del modelo $k - \varepsilon$.

Condiciones iniciales: A pesar de que el flujo es estadísticamente estacionario, se definen condiciones iniciales próximas al resultado para agilizar la convergencia del problema. Como condiciones iniciales se definen las dos variables del modelo $k - \varepsilon$; $k = 0,35 \text{ m}^2/\text{s}^2$ y

$\varepsilon = 3,92 \text{ m}^2/\text{s}^3$ y el campo de velocidades y presiones, resultado de la simulación previa con la aproximación de flujo de Stokes.

La condición inicial para la simulación de flujo de Stokes es la componente x de la velocidad, $u = 12 \text{ m/s}$.

Condiciones de contorno:

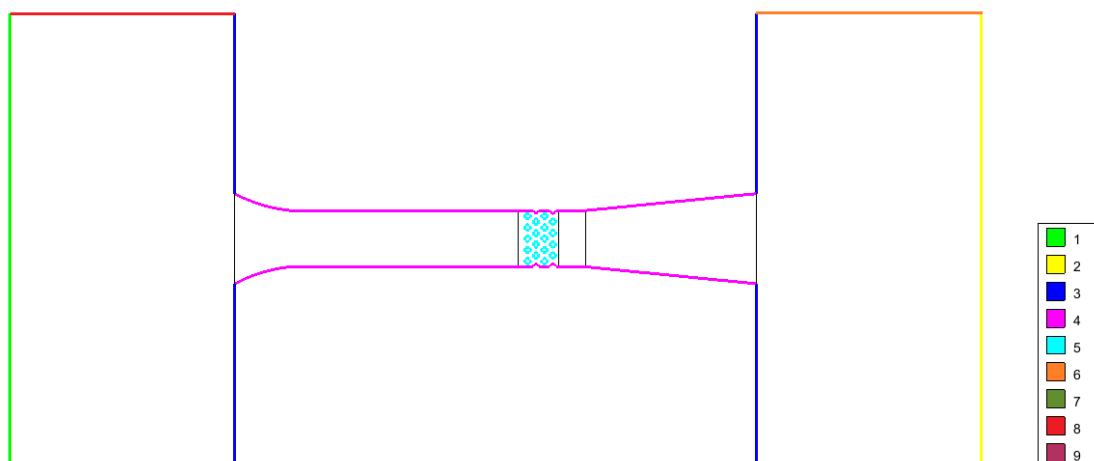


Figura 5.5. Numeración de las líneas del dominio o “Target Boundaries”.

En las líneas 1 y 2 se aplican condiciones de contorno periódicas para las tres componentes de la velocidad y las dos variables turbulentas, en cambio para la presión se define un gradiente entre ellas. Para diluir las turbulencias a la salida del segundo reservorio se fuerza la componente vertical de la velocidad en cero, en la línea 2.

Se aplican condiciones periódicas en las líneas 6-7 y 8-9 respectivamente, para las tres componentes de la velocidad, las dos variables turbulentas y la presión, de esta manera se intentan eliminar las paredes de los reservorios y así no forzar el flujo.

En las líneas con número 3 se definen como paredes, con la velocidad $u = 0 \text{ m/s}$ para asegurar que la velocidad normal a la superficie sea igual a cero y aplicando la aproximación de función de pared, ley de pared de Reichardt, con una distancia de pared λ definida en la Tabla 5.2.

Las líneas con número 4 también son paredes, pero el hecho de que contiene líneas curvas, conviene cambiar el sistema de coordenadas global, por uno local en cada nodo con componentes normal-tangencial. De esta manera se puede forzar la componente normal a la superficie como cero. En este caso también se aplica la ley de pared de Reichardt, con λ definida en la Tabla 5.2.

Para los tubos representados por los círculos con número 5, se definen igual que las líneas 4, es decir, velocidad normal cero y ley de pared con λ definida en la Tabla 5.2.

Nº de línea	λ	P	P flujo de Stokes
1	-	1000	1,5
2	-	0	0
3	0,006	-	-
4	0,004	-	-
5	0,003	-	-

Tabla 5.2. Condiciones de contorno de las líneas.

5.1. Resultados de las simulaciones

A continuación se representan los resultados con *ParaView* para el campo de velocidades, presiones y energía cinética turbulenta. Para apreciar bien los resultados, se dibuja el perfil de velocidades aguas arriba y aguas abajo del banco de tubos, a partir de los datos de un corte en la sección del canal, perpendicular a las paredes. En aguas arriba, el corte se realiza a una distancia de la “entrada” del reservorio de 1,1 m y en aguas abajo de 1,222 m. El ancho del canal de aspiración es de 125 mm con el eje central, por tanto la y va desde -62,5 mm a 62,5 mm. En rojo se representan los datos de la simulación y en azul los tomados experimentalmente.

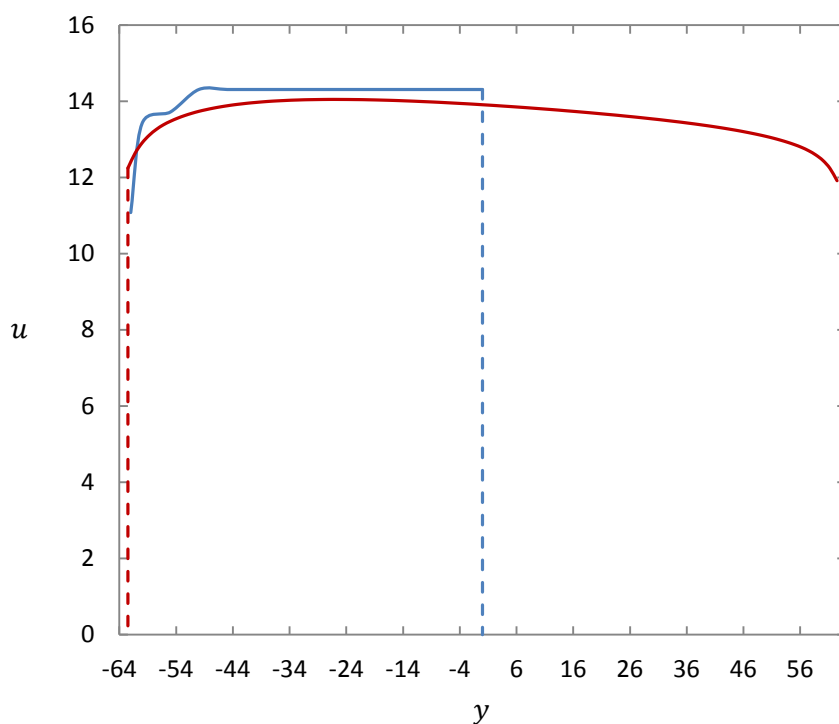


Figura 5.6. Comparación de los perfiles de velocidades aguas arriba.

Comparando los dos perfiles se observa que a partir del gradiente de presiones definido, se ha conseguido una buena aproximación a la velocidad experimental en el canal de aspiración. Se

han representado los datos de la simulación para todo el canal ya que se aprecia que no hay una simetría completa. Esto se puede deber a que los reservorios no son lo suficientemente grandes como para disolver las turbulencias, generando velocidades más elevadas en la parte baja del canal. En la Figura 5.8 se puede ver también que los resultados en el reservorio y la tobera no son completamente simétricos respecto al eje.

Cabe recordar que los valores mínimos del perfil de velocidades no son cero, ya que al aplicar la ley de pared, los resultados que se tienen son a una distancia λ de la pared. Lo mismo se observa en la figura Figura 5.7.

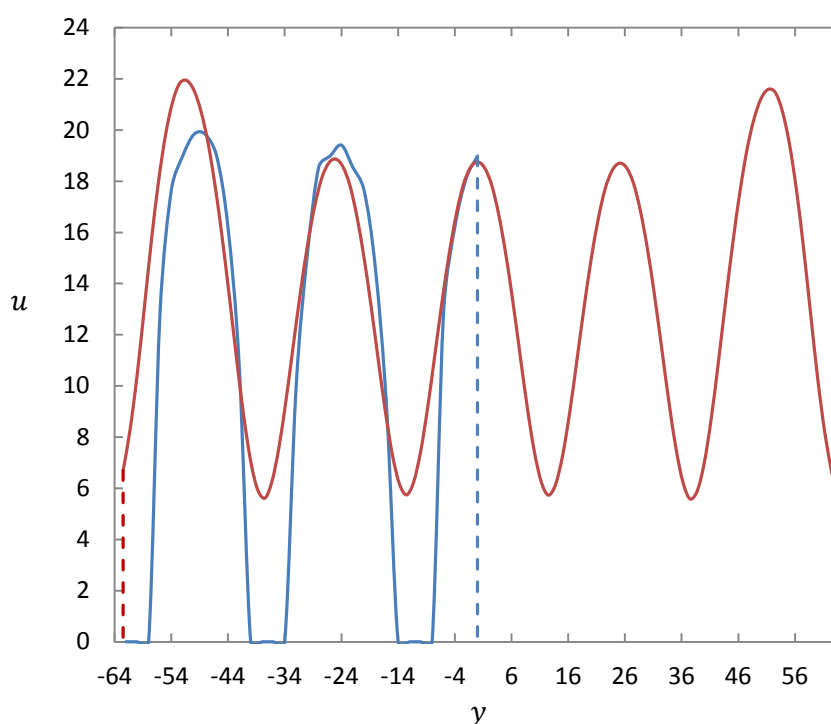


Figura 5.7. Comparación de los perfiles de velocidades aguas abajo.

El perfil aguas abajo del banco de tubos también se aproxima bien al experimental, con una gran diferencia justo en la posición detrás de los tubos, donde la velocidad experimental es cero. Esto se puede deber a la mala precisión del manómetro del laboratorio para presiones bajas, o bien que la distancia del corte no es la misma que la posición del tubo de Pitot.

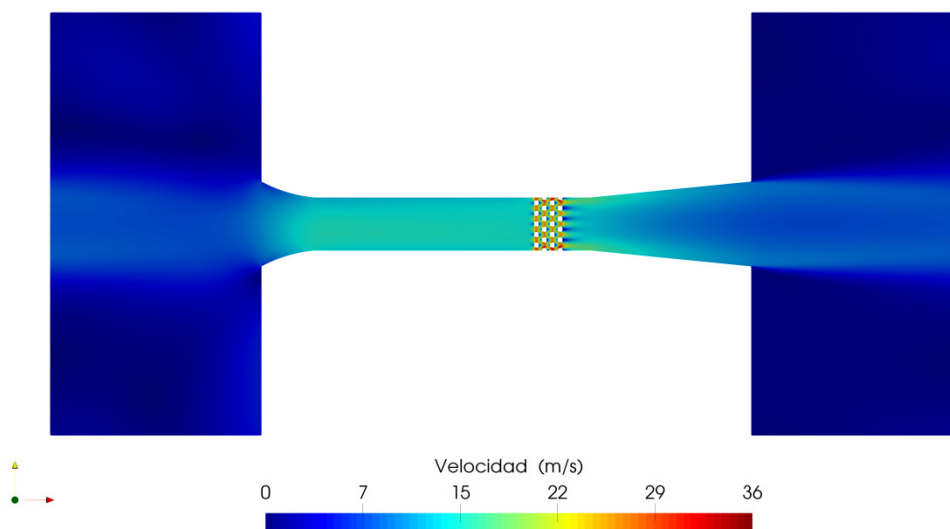


Figura 5.8. Resultado del campo de velocidades para todo el dominio computacional.

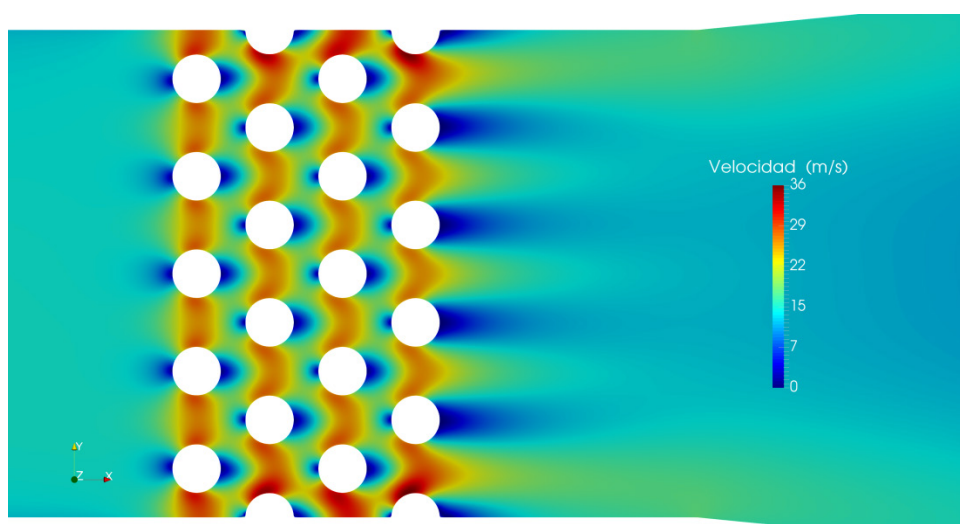


Figura 5.9. Detalle del banco de tubos para la variable velocidad.

Analizando la Figura 5.8 y la Figura 5.9 se observa que la velocidad del aire incrementa al entrar por la tobera, y entre los tubos se dobla la velocidad máxima del canal de aspiración, tal y como se esperaba analíticamente. Como ya se ha comentado, al aplicar la ley de pared se observa que la velocidad alrededor de los tubos y las paredes no es nula.

Las condiciones periódicas de los reservorios se han resuelto correctamente ya que se tiene los mismos resultados en la “entrada” y “salida”.

En la Figura 5.9 se puede ver que los dos tubos de la tercera fila más cercanos a la pared, tiene la mitad de espacio en el lado de la pared, por tanto la velocidad del flujo es el doble. Como consecuencia, la última fila de tubos tiene velocidades más altas en los espacios exteriores. Esto

explica que en la Figura 5.7, se vean claramente que los dos picos exteriores alcanzan velocidades más elevadas que las centrales.

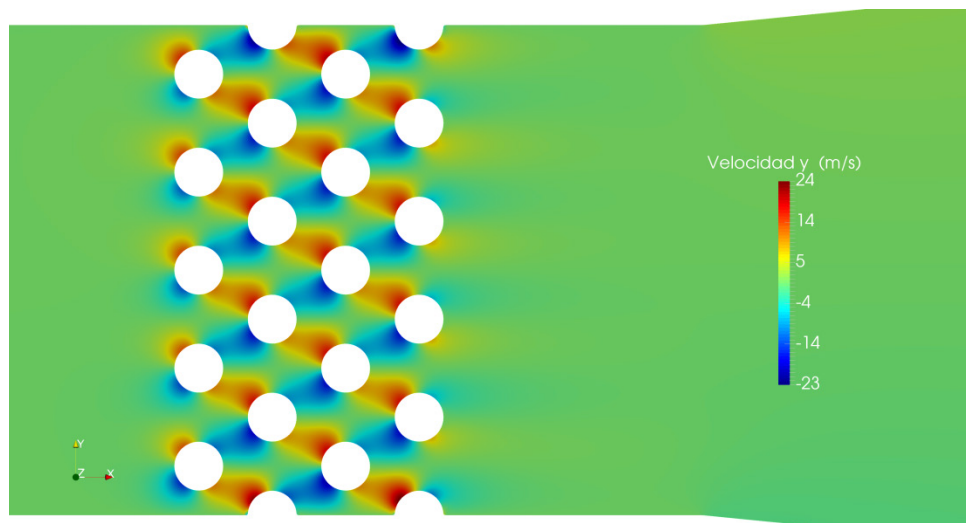


Figura 5.10. Detalle del banco de tubos para la variable velocidad en y .

En la Figura 5.10 se ha representado las velocidades en y , para comprobar que efectivamente la mitad del flujo circula hacia arriba y hacia abajo de los tubos. En color azul se ve el flujo hacia abajo y en rojo hacia arriba.

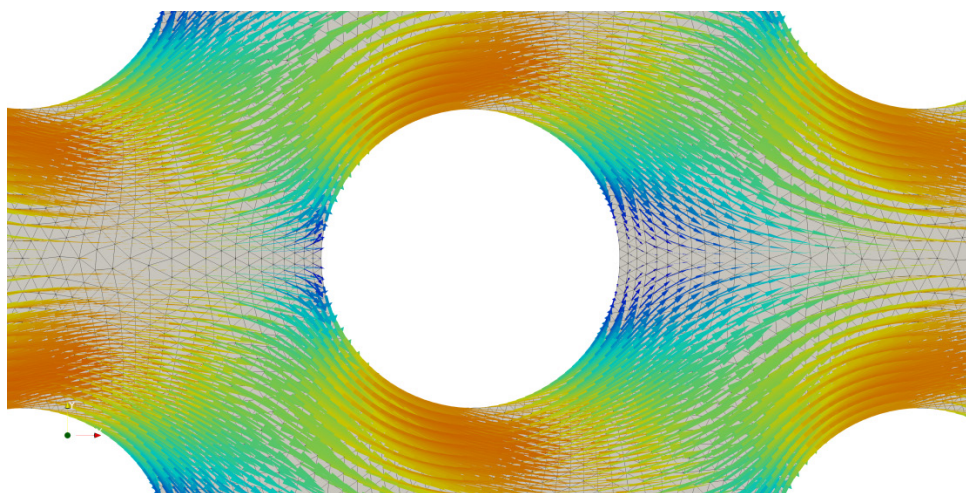


Figura 5.11. Detalle de los vectores velocidad en cada nodo de la malla alrededor de los tubos.

Es fundamental comprobar que la condición de pared se está aplicando correctamente, especialmente en los lugares donde el contorno no es recto. En la Figura 5.11 se dibujan los vectores a escala en cada nodo de la malla y se verifica que todos ellos siguen el contorno del cilindro y que ningún vector traspasa el límite de la pared.

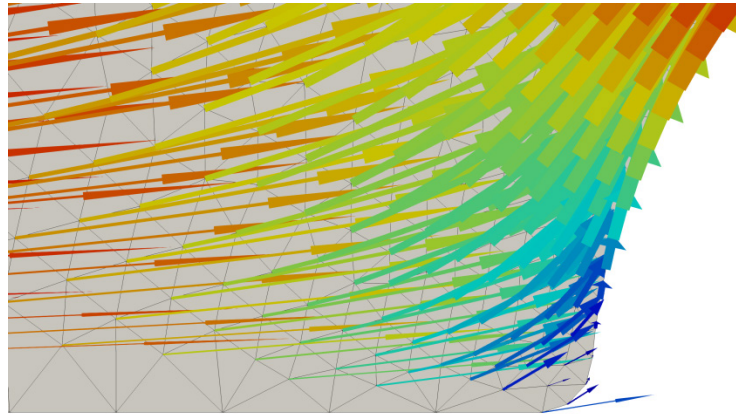


Figura 5.12. Detalle de la esquina redondeada.

Las esquinas puntiagudas se convierten en puntos críticos en las zonas en las que los gradientes son elevados, por este motivo se han redondeado las esquinas de los cilindros cortados. Es posible que se vean vectores que sobresalen fuera del contorno, pero no serán preocupantes siempre que sean tangentes al contorno o tengan un valor próximo a cero.

En la Figura 5.13 se puede ver que sin las esquinas redondeadas se obtienen resultados erróneos.

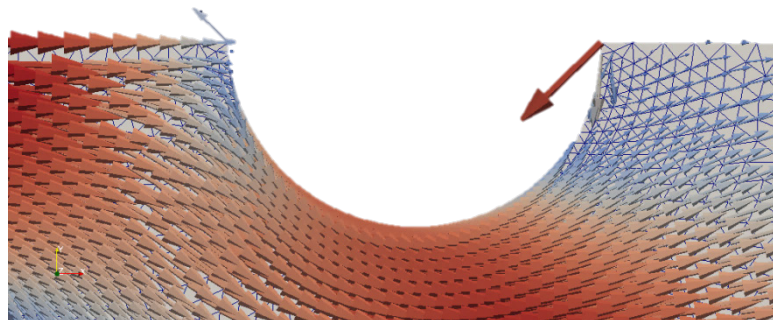


Figura 5.13. Detalle de la esquina sin redondear.

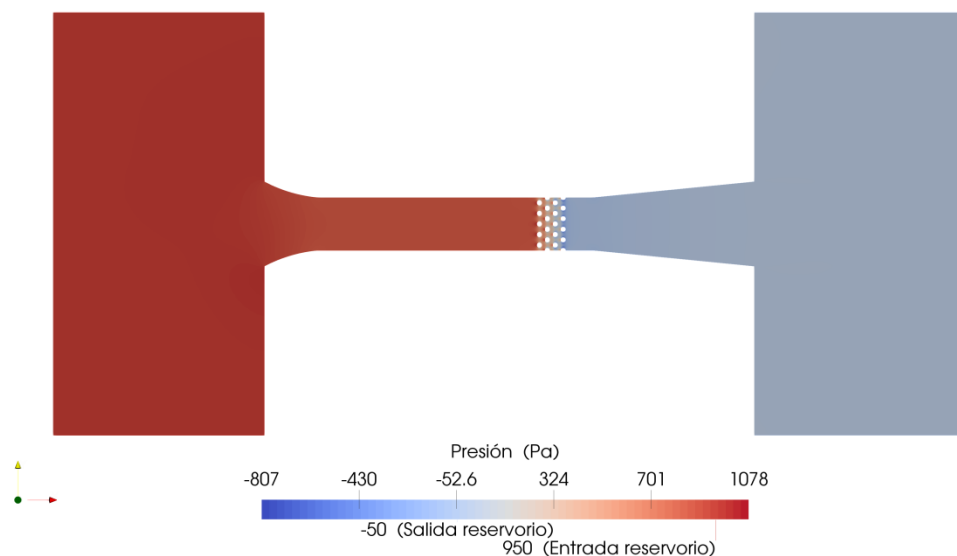


Figura 5.14. Resultado del campo de presiones para todo el dominio computacional.

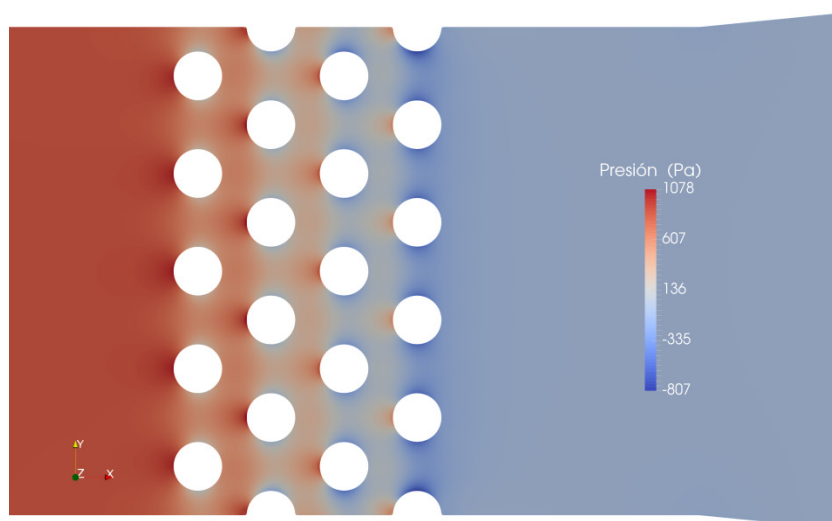


Figura 5.15. Detalle del banco de tubos para la presión.

Al analizar la Figura 5.14 y Figura 5.15 se observa que el banco de tubos divide los resultados en dos regiones con presiones bien diferenciadas, presiones altas aguas arriba y presiones bajas aguas abajo. Si extraemos la presión en la “entrada” del primer reservorio nos da 950 Pa y en la “salida” del segundo reservorio -50 Pa. Estas no son la presiones que se definieron como condiciones de contorno, sin embargo lo que si coincide es el gradiente de presiones;

$$\Delta P = 950 - (-50) = 1000 \text{ Pa}$$

En los tubos se observa que efectivamente, la mayor presión se da en la zona justo donde el flujo incide perpendicularmente a la pared, y la menor presión se da en los lados donde el flujo incide tangencialmente a las paredes y alcanza la mayor velocidad.

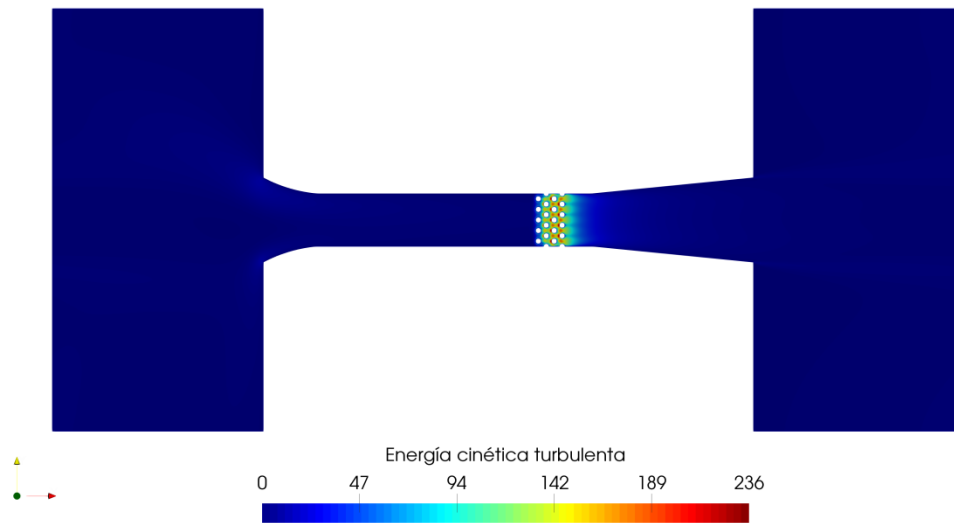


Figura 5.16. Resultado de la energía cinética turbulenta k para todo el dominio computacional.

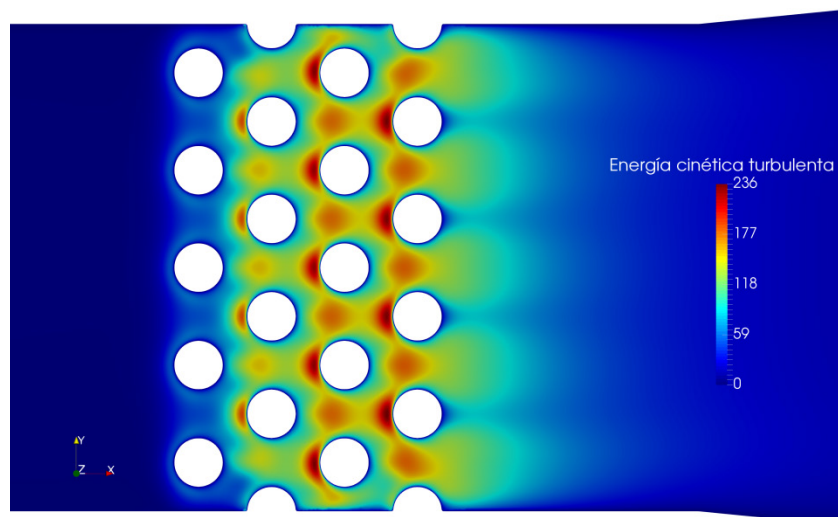


Figura 5.17. Detalle del banco de tubos para la energía cinética turbulenta k .

Se observa en la Figura 5.16 y Figura 5.17 que la única zona con energía cinética es en el banco de tubos, especialmente con valores altos a partir de la segunda fila de tubos y en la parte donde el flujo incide frontalmente.

Se encontró un problema en Elmer que hizo interpretar mal los resultados. Después de importar la malla a Elmer, al guardarlo como proyecto, se reescribían erróneamente los archivos de la malla, y al ejecutar la simulación, en algunas zonas determinadas se obtenían resultados erróneos, interpretando que la causa se debía al mal diseño. Esto se solucionó ejecutando el programa sin guardarlo.

En la Figura 5.18 y la Figura 5.19 se puede ver como en la simulación errónea, los vectores atraviesan la frontera del dominio.



Figura 5.18. A la derecha, detalle del error entre el reservorio y tobera, y en la izquierda, con el error corregido.

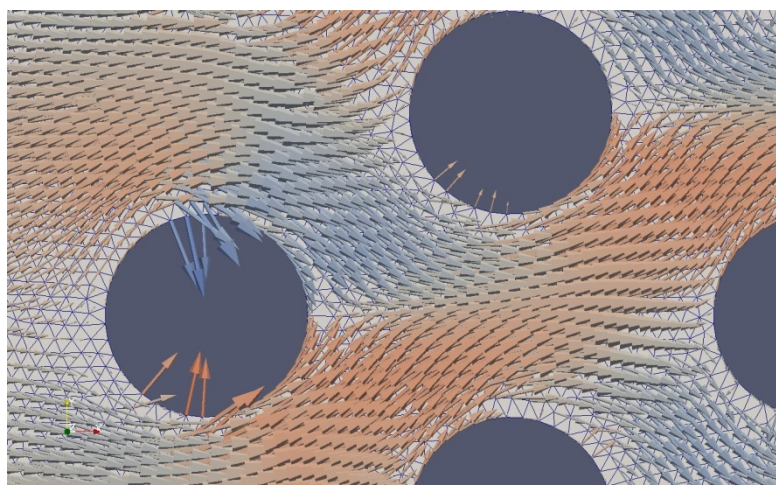


Figura 5.19. Detalle del error en los tubos.

6. Conclusiones

Con los resultados obtenidos de la simulación del intercambiador de calor, se puede considerar que se ha obtenido una buena aproximación a los resultados experimentales, teniendo en cuenta que se ha usado un modelo de turbulencia en el que se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes y se modelan todas las escalas de turbulencia, por lo tanto, es evidente que no se puede esperar obtener unos resultados a la altura de unos realizados por DNS. Las limitaciones que implican el uso del modelo $k - \varepsilon$ hacen que el modo de resolver el problema no sea de la manera más sencilla y correcta. Por ejemplo, el uso de la ley de pared es inevitable para que el modelo trabaje bien, y esto supone que no se resuelva lo que realmente ocurre en la capa límite condicionando el resultado. La elección de una distancia de pared λ correcta según el Reynolds que se tiene, es muy complejo cuando no se trata de un simple canal y afecta muchísimo a los resultados. Tampoco se pueden establecer unas condiciones iniciales precisas para la velocidad y las variables turbulentas, ya que inicialmente se desconocen.

A parte de las limitaciones del modelo, se tienen las limitaciones del programa de elementos finitos usado. Debido a la falta de documentación para resolver flujos turbulentos, ha ralentizado muchísimo encontrar la manera más adecuada para definir el problema. La incógnita principal era conocer el perfil de velocidades que se tenía en el canal de aspiración, una vez se tuviese, se podría resolver el banco de tubos con el mismo régimen. De este modo, inicialmente se pretendía resolver por separado el flujo del canal de aspiración, obteniendo el perfil de velocidades, y luego estableciéndolo como condición de contorno para resolver el banco de tubos. Debido a la escasa información y las dificultades que se presentaron, se descartó esta opción, la cual podría haber facilitado muchísimo el cálculo.

La siguiente opción era recurrir a dos reservorios y aplicar condiciones periódicas igual que se había hecho en el problema del canal. Antes de poder utilizarlas se tuvo que invertir una gran parte del tiempo del trabajo simplemente para que funcionasen. La última versión de Elmer utilizada, llevaba implementada la posibilidad de aplicarlas, pero al escribir el archivo de entrada para la ejecución, se escribían incorrectamente unos identificadores, por lo que supuso estudiar el funcionamiento del archivo mediante otros de referencia y modificarlo manualmente cada vez que se editaba.

Para llegar a la configuración más adecuada del número máximo de iteraciones, las tolerancias de convergencia, y el tamaño y el número de *timesteps*, se ha llegado a partir de numerosas simulaciones y entendiendo como funciona la ejecución o *solver* de Elmer.

La elaboración de la malla ha sido otro de los pasos en el que ha tenido una gran dedicación. Para obtener unos buenos resultados es imprescindible una buena malla en la que se busca un balance entre una malla grande en las zonas menos críticas para minimizar el tiempo de cálculo, y una más fina para las paredes y los puntos más críticos. Es cierto que se puede hacer un cálculo previo para tener el orden de magnitud para las celdas de las paredes, pero requiere hacer numerosas simulaciones para acabar de ajustarla.

Finalmente se puede decir que a pesar de las dificultades encontradas y las limitaciones tanto del modelo como del programa usado, se han podido obtener unos resultados satisfactorios. Lo ideal hubiese sido que si se hace un estudio del flujo del intercambiador de calor, luego se resuelva la transferencia de calor y el transitorio de enfriamiento, pero debido a la cantidad de tiempo que se ha tenido que dedicar a “calibrar” y resolver problemas relacionados con la falta de documentación de Elmer, se ha tenido que omitir esta parte. También se pretendía resolver el problema con el modelo $k - \omega$ además del $k - \varepsilon$, pero debido al tiempo invertido y la complejidad del $k - \omega$ se acabó descartando.

7. Presupuesto

En este apartado se detalla el coste económico de la elaboración del trabajo final de grado, teniendo en cuenta los costes de equipamiento matrícula recursos humanos

Equipamiento

Para elaborar el trabajo se ha utilizado un ordenador personal *Acer TravelMate 5742*. A partir del coste inicial del ordenador, se estima el coste de amortización teniendo en cuenta una vida útil de 3 años y un uso de 5 meses, que es lo que ha durado este trabajo.

$$\text{Coste amortización PC} = 400 \text{ €} \cdot \frac{5 \text{ meses}}{3 \text{ años} \cdot 12 \text{ meses}} = 55,60 \text{ €}.$$

El ordenador tiene un consumo medio estimado de 100 W usado durante alrededor de 600 horas de trabajo. A partir de la tarifa media de la electricidad 0,14 €/kWh se obtiene el coste de consumo del uso del ordenador;

$$\text{Consumo PC} = 100 \text{ W} \cdot 600 \text{ h} \cdot \frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ W}} = 60 \text{ kWh};$$

$$\text{Coste consumo PC} = 60 \text{ kWh} \cdot 0,14 \frac{\text{€}}{\text{kWh}} = 8,40 \text{ €}.$$

El coste de la matrícula del trabajo, más los costes de servicios administrativos es de 948,02 €. Se considera que el coste de utilización de los ordenadores de la UPC y el servicio de biblioteca están incluidos dentro del coste de matrícula.

Tipo de coste	Coste
Coste amortización PC	55,60 €
Coste consumo PC	8,40 €
Coste matrícula	948,02 €
Total	1.012,02 €

Tabla 7.1. Costes asociados al uso de equipamiento.

Recursos humanos

A partir de las horas trabajadas, con un coste de coste de 30 €/h se tiene;

$$\text{Coste recursos humanos} = 600 \text{ h} \cdot 30 \text{ €/h} = 18.000 \text{ €}.$$

Coste total

Tipo de coste	Coste
Coste equipamiento	1.012,02 €
Coste recursos humanos	18.000 €
Total	19.012,02 €
IVA (21%)	3.992,55 €
Coste total	23.004,67 €

Tabla 7.2. Coste total del trabajo.

8. Bibliografía

Referencias bibliográficas

- [1] Revista Cero Grados Celsius. “Un gran clásico, torres de enfriamiento.” Acceso 27 julio 2017. <https://www.0grados.com/gran-clasico-torres-enfriamiento/>.
- [2] Çengel, Yunus A. y Ghajar, Afshin J. *Transferencia de calor y masa. Fundamentos y aplicaciones*. 4ª ed. México, D.F.: McGraw-Hill, 2011.
- [3] Lee, Myoungkyu y Moser, Robert D. "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_{\tau} = 5200$." *Journal of Fluid Mechanics* vol. 774 (2015): 395-415.
- [4] Çengel, Yunus A. y Cimbala, John M. *Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. 1ª ed. México, D.F.: McGraw-Hill, 2006.
- [5] Pope, Stephen B. *Turbulent flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Bibliografía complementaria

CFD Online. “K-epsilon models.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/K-epsilon_models.

CFD Online. “Linear Eddy viscosity models.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Linear_eddy_viscosity_models.

CFD Online. “Standard k-epsilon model.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Standard_k-epsilon_model.

CFD Online. “Turbulence free-stream boundary conditions.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_free-stream_boundary_conditions.

CFD Online. “Turbulence intensity.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_intensity.

CFD Online. “Turbulent length scale.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulent_length_scale.

CFD Online. “Two equation models.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Two_equation_models.

CFD Online. “Y plus wall distance estimation.” Acceso 14 de julio 2017. https://www.cfd-online.com/Wiki/Y_plus_wall_distance_estimation.

Comsol. “Which Turbulence Model Should I Choose for My CFD Application?” Acceso 14 de julio 2017. <https://www.comsol.com/blogs/which-turbulence-model-should-choose-cfd-application/>.

Fluid Dynamics Group UPM. "DNS TURBULENT CHANNEL DATA." Acceso 21 de mayo 2017. <http://turbulence.ices.utexas.edu/>.

LearnCAx. "Basics of Y Plus, Boundary Layer and Wall Function in Turbulent Flows." Acceso 14 de julio 2017. <https://www.learncax.com/knowledge-base/blog/by-category/cfd/basics-of-y-plus-boundary-layer-and-wall-function-in-turbulent-flows>.

LearnCAx. "Turbulence Parameter Calculator at Inlet Boundary." Acceso 14 de julio 2017. <https://www.learncax.com/knowledge-base/tools/cfd-calculation-tools/turbulence-parameter-calculator-at-inlet-boundary>

NASA, Glenn Research Center. "Reynolds number." Acceso 9 de julio 2017. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/reynolds.html>.

Stanford University. "Turbulence." Acceso 14 de julio 2017. <https://web.stanford.edu/class/me469b/handouts/turbulence.pdf>

UNED. "Flujos turbulentos en la proximidad de una pared. Ley de la pared." Acceso 14 de julio 2017. <http://www2.uned.es/ing-fluidos/IntroMF/node78.html>

University of Leeds. "Laminar and turbulent flow." Acceso 9 de julio 2017. http://www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/CIVE1400/Section4/laminar_turbulent.htm.

Wikipedia. "K-epsilon turbulence model." Acceso 14 de julio 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/K-epsilon_turbulence_model.

Wikipedia. "Reynolds number." Acceso 9 de julio 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number.

Wikipedia. "Turbulence kinetic energy." Acceso 14 de julio 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Turbulence_kinetic_energy.

Anexo A: Tutorial del flujo laminar $Re = 10$ a través de un canal

En este apartado se describe paso a paso como resolver computacionalmente el problema del flujo laminar $Re = 10$ a través de un canal. Primero se genera la malla en *GiD*, se resuelve en *Elmer* y se procesan los resultados con *ParaView*.

Las instrucciones escritas con la tipografía “Courier New” se refieren a operaciones con el GUI (Graphic User Interface) de los programas utilizados.

Generación de la malla:

Abrimos *GiD*.

Cargamos el tipo de problema que *GiD* va a resolver.

```
Datos
  Tipo de Problema
    elmer
```

Creamos la carpeta donde se guardarán los archivos del problema.

```
Archivo
  Guardar Como -> Loop_2x4m
  Salvar
```

Dibujamos la geometría del problema, generando 4 puntos unidos por líneas.

```
Geometría
  Crear
    Punto
    0 -1
    4 -1
    4 1
    0 1
```

```
Geometría
  Crear
    Línea recta
```

Ctrl + A para activar la selección de puntos existentes. Unimos los puntos en un mismo sentido.

Creamos una superficie a partir del contorno.

```
Geometría
  Crear
    Superficie NURBS
    Por contorno
```

Seleccionamos las líneas en un mismo sentido.

Definimos las condiciones y el material para el problema.

Datos

Condiciones

LineConstraint

Índice = 1

Asignar

Seleccionamos la línea vertical izquierda

Terminar

Índice = 2

Asignar

Seleccionamos la línea vertical derecha

Terminar

Índice = 3

Asignar

Seleccionamos la línea horizontal inferior

Terminar

Índice = 4

Asignar

Seleccionamos la línea horizontal superior

Terminar

Cerrar

Datos

Materiales

Asignar

Superficies

Seleccionamos la superficie

Terminar

Cerrar

Definimos la malla de la geometría.

Malla

Estructurada

Superficies

Asignar número de divisiones

Seleccionamos la superficie

Entrar el número de divisiones... = 40

Asignar

Seleccionamos las líneas horizontales

Entrar el número de divisiones... = 40

Asignar

Seleccionamos las líneas verticales

Cerrar

Generamos la malla

Malla

Generar malla...

No hacemos caso del tamaño de los elementos a generar, ya que la definición anterior tiene preferencia.

Aceptar

Concentramos la malla en las paredes del canal. Al concentrar elementos no nos genera más nodos, solo distribuye el peso de los elementos hacia el inicio y el final de la línea según se defina.

Malla

Estructurada

Líneas

Concentrar elementos

Seleccionamos las líneas verticales

Peso inicio = 0.3

Último peso = 0.3

Aceptar

Volvemos a generar la malla.

Malla

Generar malla...

Aceptar

Calculamos el problema para que GiD genere los archivos que definen la malla, que posteriormente se abrirán con Elmer.

Los archivos son:

mesh.boundary

mesh.elements

mesh.header

mesh.nodes

Calcular

Calcular

Esperamos a que acabe el proceso o cálculo

Aceptar

Guardamos el proyecto.

Archivo

Guardar

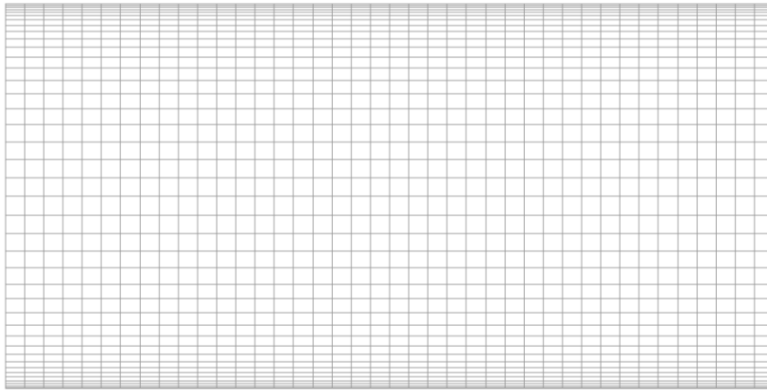


Figura A.1. Malla estructurada del canal.

Definición y cálculo del problema:

Abrimos *Elmer*.
Cargamos la malla.

```
File  
  Load mesh... -> Loop_2x4m.gid
```

Podemos ver el resumen de las características de la malla, como por ejemplo; las coordenadas, el número de nodos y elementos, etc.

```
Model  
  Summary...
```

Creamos la carpeta donde se guardarán los archivos del problema.

```
File  
  Save project
```

Para definir el problema empezamos por el menú *Model* de arriba abajo.

En el *Setup* definimos todo lo relacionado con la simulación. La simulación que se realizará será en estado estacionario y en 2 dimensiones en coordenadas cartesianas, que es lo que viene por defecto.

```
Model  
  Setup...  
    Steady state max. iter = 1  
    Coordinate system = Cartesian  
    Simulation Type = Steady state  
    Apply
```

En el apartado *Equation* activamos las ecuaciones a resolver y los ajustes relacionados con la resolución de ellas. También se puede activar la generación de archivos de resultados para

poder procesarlos con un programa externo como *ParaView*. En este caso, al ser flujo laminar solo se usará la ecuación de Navier-Stokes.

```
Model
  Equation
    Name = Navier-Stokes
    Apply to Bodies = Body 1
    Navier-Stokes
      Active = on
      Edit Solver Settings
        Nonlinear system
          Max. iterations = 20
          Newton after iterations = 3
        Linear system
          Iterative = BiCGStab
          Convergence tol. = 1.0e-6
          Preconditioning = ILU1
      Apply
    Result Output
      Active = on
      Edit Solver Settings
        General
          Execute solver = After timestep
      Apply
    Add
  OK
```

En el apartado **Material** se definen todos los parámetros del material.

```
Model
  Material
    Name = Re10
    Apply to Bodies = Body 1
    General
      Density = 1.0
    Navier-Stokes
      Viscosity = 0.1
    Add
  OK
```

En el apartado **Body force** se definen las fuerzas que se aplican al material. En este caso se aplicará una fuerza de volumen al fluido, de esta manera se evita tener que definir un perfil de velocidades desconocido en la entrada del canal y así no condicionar el resultado.


```
Model
  Body force
    Name = BodyForce 1
    Apply to Bodies = Body 1
    Navier-Stokes
      Force 1 = 0.2
      Force 2 = 0.0
      Force 3 = 0.0
    Add
  OK
```

Al ser un problema estacionario no es necesario definir el apartado `Initial condition`.

En el apartado `BoundaryCondition` se definen las condiciones de contorno. En este caso se definirán las dos paredes del canal con condición de no deslizamiento, con entrada-salida periódica.

```
Model
  BoundaryCondition
    Name = Walls
    Apply to boundaries = Boundary 3, Boundary 4
    Navier-Stokes
      Noslip wall BC = on
    Add
  OK
```

```
Model
  BoundaryCondition
    Name = Periodic slave
    Apply to boundaries = Boundary 2
    Add
  OK
```

```
Model
  BoundaryCondition
    Name = Periodic master
    Apply to boundaries = Boundary 1
    General
      Periodic Boundary ID = 2
    Navier-Stokes
      Velocity 1 periodic = on
      Velocity 2 periodic = on
      Velocity 3 periodic = on
      Pressure periodic = on
    Add
  OK
```

El `Periodic Boundary ID` corresponde al número de la `Boundary Condition` `n`, y no al número de línea del dominio `Boundary n`, que es equivalente al `Target Boundaries`.

Es conveniente repasar que se han asignado correctamente todas las ecuaciones, materiales y fuerzas al cuerpo o fluido en `Set body properties`.

Model
 `Set body properties`
 Doble click en el cuerpo

Conviene repasar también, que se han asignado correctamente todas las condiciones de contorno al dominio en `Set boundary properties`.

Model
 `Set boundary properties`
 Doble click en cada uno de los contornos

Una vez se ha definido toda la información en la interfaz de Elmer, ya se puede generar el archivo de comandos *Sif* (Solver input file). Después de generarlo es útil revisarlo.

Sif
 Generate
 Edit
 Revisar que todo este correctamente

En la versión de Elmer que se está utilizando, 8.2, el `Periodic Boundary ID` no se escribe correctamente en el *Sif*. Dentro de `Boundary Condition 3` debería haber `Periodic BC = 2`, referente a la segunda condición de contorno definida, la `Periodic slave`. Antes de editar el *Sif* se debe guardar el proyecto.

File
 `Save project`

Editamos el *Sif* y lo guardamos reemplazando el archivo anterior. Ahora no podemos volver a guardar el proyecto, ya que nos lo guardaría generando el *Sif* anterior.

Ejecutamos el problema.

Run
 `Start solver`

El problema converge en 2 iteraciones.

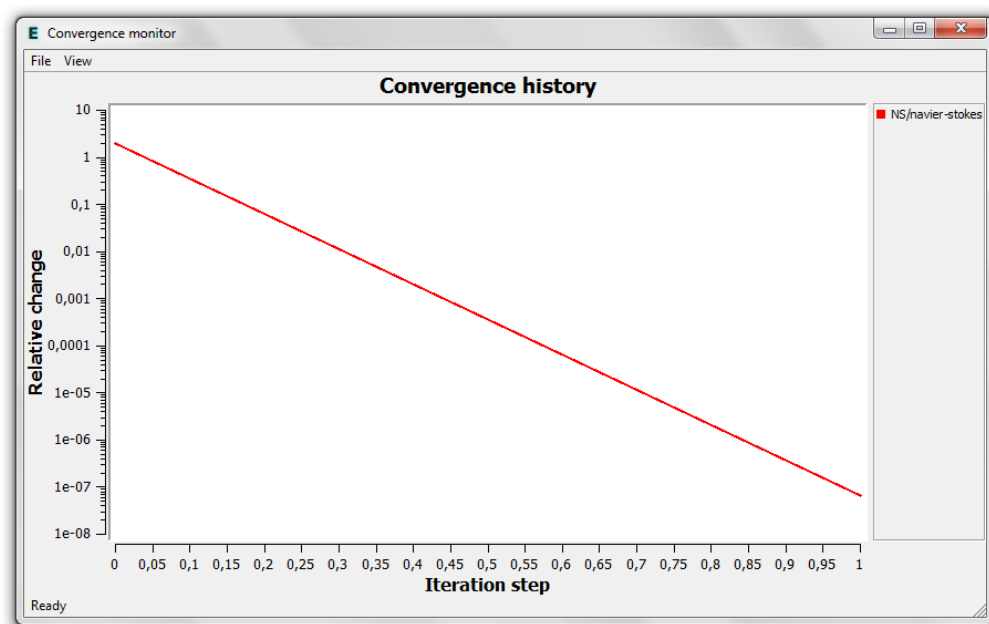


Figura A.2. Gráfica de convergencia del problema.

Podemos ver los resultados en ElmerPost.

Run

Start ElmerPost

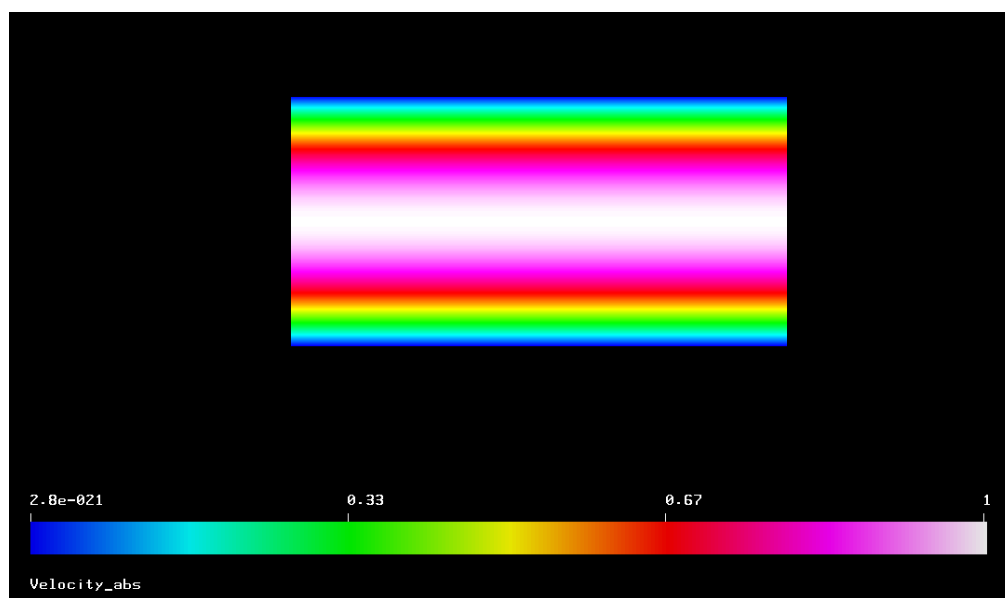


Figura A.3. Resultado del campo de velocidades.

Postprocesado de resultados:

Abrimos *ParaView*.

Cargamos el archivo de resultados.

File

Open

Abrir archivo .vtu dentro de la carpeta de archivos del problema (dependiendo de la versión, es posible que haya de estar ubicado en C:/).

En el panel lateral *Properties* establecemos la configuración y lo aplicamos para visualizarlo;

Properties

Apply

Seleccionamos la magnitud que queramos visualizar en el panel superior. En este caso seleccionamos la velocidad.

Solid Color

velocity

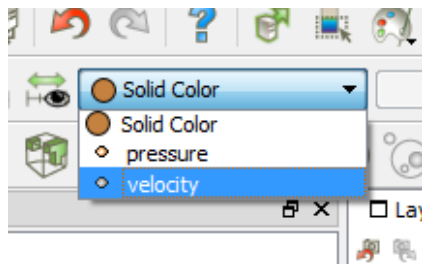


Figura A.4. Ventana del panel superior de *ParaView*.

Para este problema podemos ver los resultados para la magnitud de presión o velocidad.

En caso que no se vean correctamente los colores o un color uniforme, escalamos el rango de velocidades para el problema en el panel superior.

Rescale to Data Range

Dibujamos el perfil de velocidades en la sección del canal a una distancia determinada. En este caso, independientemente de la distancia de la sección, veremos el mismo perfil de velocidades.

Filters

Data Analysis

Plot Over Line

En el panel lateral *Properties* definimos los dos puntos de la recta que cortará la sección.

```
Properties
Probe Type = High Resolution Line Source
Y Axis
Apply
```

En el panel lateral **Properties** editamos los parámetros que queremos visualizar.

```
Series Parameters
    velocity_Magnitude
```

Podemos guardar el análisis o estado ‘StateFile’, como fichero .pvsm.

```
File
    Save State
```

Para volver a cargar el mismo análisis;

```
File
    Load State
```

Exportamos los valores del perfil de velocidades en formato de datos como fichero .csv (comma-separated values). Es recomendable guárdalo dentro de la carpeta de archivos del problema. Antes de guardar el archivo de datos ha de estar seleccionado el **PlotOverLine1** en el panel lateral **Pipeline Browser**, en caso contrario el archivo de datos contendrá los resultados para todo el dominio y no la sección de corte.

```
File
    Save Data
    OK
```

Abrimos el archivo .csv con *Excel* y separamos los datos en columnas para después poder crear la gráfica del perfil de velocidades.

Seleccionamos toda la primera columna;

```
Datos
    Texto en columnas
        Delimitados
        Siguiente >
        Separadores = Coma
        Siguiente >
        General
        Avanzadas...
            Separador decimal: ,
            Separador de miles: .
            Aceptar
        Finalizar
```

Eliminamos todas las columnas no necesarias, dejando *velocity:0* que corresponde a la velocidad en la dirección *X* y *Points:1* que corresponde a las coordenadas *Y*.

Dibujamos el perfil de velocidades.

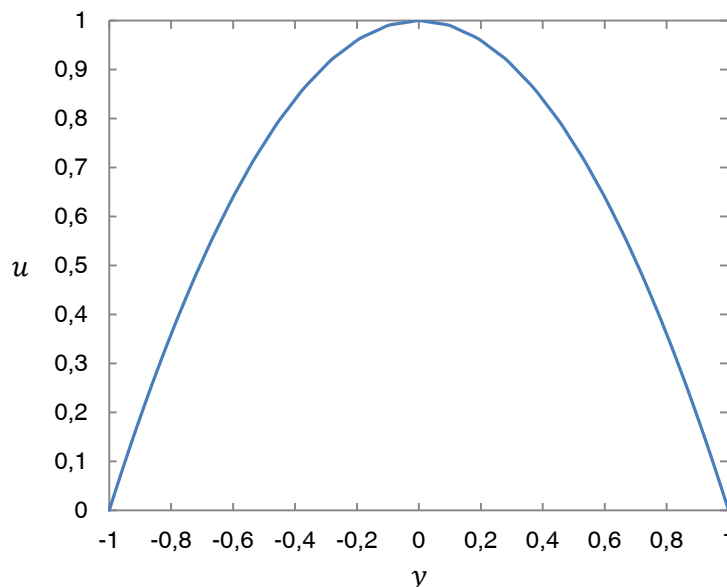


Figura A.5. Perfil de velocidades para $Re = 10$.

Con el siguiente script de Matlab, dibujamos el perfil de velocidades analítico y el obtenido a partir de los resultados del problema ejecutado con Elmer, además, se calcula el error que hay entre los dos resultados. Para que pueda ejecutarse, el nombre del archivo csv ha de ser el mismo que se ha definido en el scrip. El texto en verde encabezado con el porcentaje, no forma parte del código, son solo anotaciones.

```
syms x % Crea la variable simbólica "x".
u=-1*(x-1)*(x+1); % Define la función u(x), que es la función
analítica del perfil de velocidades.
xexact=0:0.001:1; % Genera un conjunto de x.
uexact=subs(u,xexact); % Devuelve la función u evaluada en las x
generadas.
```

```
fid = fopen('Datos_corte_completo.csv'); % fid es el file id,
fopen es file open.
% Abre el fichero 'X.csv' y devuelve un identificador igual o
mayor a 3, solo sirve para identificar al fichero de datos.
% Matlab reserva el 0, 1 y 2 para; standard input, standard
output (the screen), standard error.
% Si no lo puede abrir devuelve un -1
line=fgetl(fid); % Lee y devuelve los caracteres del fichero,
es decir la primera línea.
[A,count] = fscanf(fid, '%e,%e,%e,%e,%e,%e,%e,%e,%e,%e', [9 Inf]);
% [A,count] = fscanf(fileID,formatSpec,sizeA), devuelve un
vector A que contiene los valores numéricos del fichero
```

(cambiando las filas por columnas), y count nos devuelve cuantos valores a leído.

% Se define el formatSpec, formato de los datos, para cada columna, %e corresponde a Floating-point number.

% Se define el sizeA como [9 Inf], ya que la matriz resultante tendrá 9 filas con un número de columnas no definido.

tmp=A(8,:); % Devuelve un vector con los valores de la fila 8(correspondiente a las y, Points:1) y para todas las columnas.

[xapprox,order]=sort(tmp); % Crea una matriz asignando sort(tmp) a xapprox.

% sort(tmp) clasifica los valores de tmp en orden ascendente.

tmp=A(2,:); % Devuelve un vector con los valores de la fila 2(correspondiente a las velocidades en x, velocity:0) y para todas las columnas.

uapprox=tmp(order); % Asigna tmp a uapprox.

plot(xexact,uexact,'-b',xapprox,uapprox,'-xr'); % Dibuja la gráfica analítica y la gráfica obtenida de los resultados del problema.

% Integramos la función del error.

error=0;

for i=1:size(xapprox,2)-1

error = error + (int((u-uapprox(i)-(uapprox(i+1)-uapprox(i))*(x-xapprox(i))/(xapprox(i+1)-xapprox(i)))^2,xapprox(i),xapprox(i+1))));

end

error=sqrt(error);

eval(error)

Al ejecutar el script nos devuelve el resultado del error, 0,0017 y nos dibuja la siguiente gráfica;

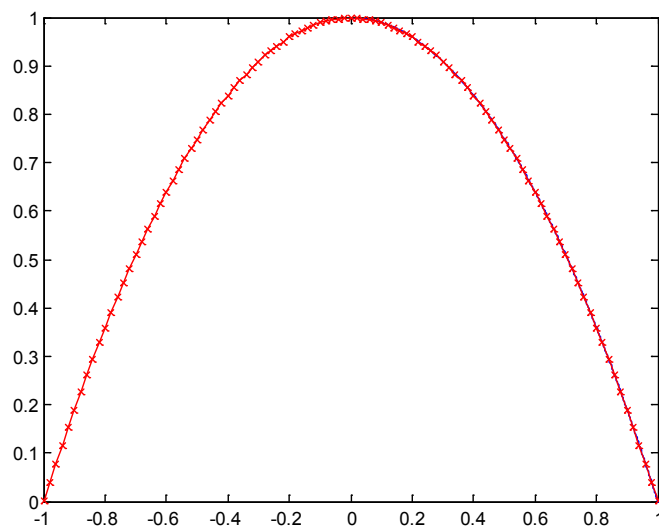


Figura A.6. Función parabólica respecto el perfil de velocidades obtenido.

Anexo B: Archivo case.sif del flujo $Re_{\tau} = 5200$ a través de un canal

```
Header
  CHECK KEYWORDS Warn
  Mesh DB "." "."
  Include Path ""
  Results Directory ""
End

Simulation
  Max Output Level = 5
  Coordinate System = Cartesian
  Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
  Simulation Type = Transient
  Steady State Max Iterations = 7
  Output Intervals = 1
  Timestepping Method = BDF
  BDF Order = 1
  Timestep intervals = 400
  Timestep Sizes = 1
  Solver Input File = case.sif
  Post File = case.ep
End

Constants
  Gravity(4) = 0 -1 0 9.82
  Stefan Boltzmann = 5.67e-08
  Permittivity of Vacuum = 8.8542e-12
  Boltzmann Constant = 1.3807e-23
  Unit Charge = 1.602e-19
End

Body 1
  Target Bodies(1) = 1
  Name = "Body Property 1"
  Equation = 1
  Material = 1
  Body Force = 1
  Initial condition = 1
End

Solver 3
  Equation = K-Epsilon
  Procedure = "KESolver" "KESolver"
  Exec Solver = Always
  Stabilize = True
  Bubbles = False
  Lumped Mass Matrix = False
  Optimize Bandwidth = True
  Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-5
  Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-4
  Nonlinear System Max Iterations = 5
  Nonlinear System Newton After Iterations = 10
  Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
  Nonlinear System Relaxation Factor = 0.5
  Linear System Solver = Iterative
  Linear System Iterative Method = BiCGstab
  Linear System Max Iterations = 500
  Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-6
  BiCGstab1 polynomial degree = 2
```



```

Linear System Preconditioning = ILU1
Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
Linear System Abort Not Converged = False
Linear System Residual Output = 1
Linear System Precondition Recompute = 1
End

Solver 2
Equation = Navier-Stokes
Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
Procedure = "FlowSolve" "FlowSolver"
Exec Solver = Always
Stabilize = True
Bubbles = False
Lumped Mass Matrix = False
Optimize Bandwidth = True
Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-5
Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-7
Nonlinear System Max Iterations = 5
Nonlinear System Newton After Iterations = 20
Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
Nonlinear System Relaxation Factor = 0.7
Linear System Solver = Iterative
Linear System Iterative Method = BiCGStab
Linear System Max Iterations = 500
Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-6
BiCGStab polynomial degree = 2
Linear System Preconditioning = ILU1
Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
Linear System Abort Not Converged = False
Linear System Residual Output = 1
Linear System Precondition Recompute = 1
End

Solver 1
Equation = Result Output
Output Format = Vtu
Procedure = "ResultOutputSolve" "ResultOutputSolver"
Output File Name = case
Exec Solver = After Timestep
End

Equation 1
Name = "Navier-Stokes"
Active Solvers(3) = 3 2 1
End

Material 1
Name = "Re_tau=5200"
Viscosity Model = K-Epsilon
Viscosity = 0.0000077614
Density = 1
End

Body Force 1
Name = "BodyForce 1"
Flow Bodyforce 1 = 0.0016
Flow Bodyforce 3 = 0.0
Flow Bodyforce 2 = 0.0
End

Initial Condition 1
Name = "InitialCondition 1"
Kinetic Energy = 0.0017
Velocity 2 = 0.0

```

```

Kinetic Dissipation = 0.0000833
Velocity 1 = 1
End

Boundary Condition 1
  Target Boundaries(2) = 3 4
  Name = "walls"
  Wall Law = True
  Velocity 2 = 0.0
  Boundary Layer Thickness = 0.008
End

Boundary Condition 2
  Target Boundaries(1) = 2
  Name = "Periodic slave"
End

Boundary Condition 3
  Target Boundaries(1) = 1
  Name = "Periodic master"
  Periodic BC Pressure = True
  Periodic BC Velocity 3 = True
  Periodic BC Velocity 2 = True
  Periodic BC Velocity 1 = True
  Periodic BC Kinetic Energy = Logical True
  Periodic BC Kinetic Dissipation = Logical True
  Periodic BC = 2
End

```

Anexo C: Archivo case.sif del intercambiador de calor

```

Header
  CHECK KEYWORDS Warn
  Mesh DB "." "."
  Include Path ""
  Results Directory ""
End

Simulation
  Max Output Level = 5
  Coordinate System = Cartesian
  Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
  Simulation Type = Transient
  Steady State Max Iterations = 100
  Output Intervals = 1
  Timestepping Method = BDF
  BDF Order = 2
  Timestep intervals = 500
  Timestep Sizes = 0.01
  Solver Input File = case.sif
  Post File = case.ep
  Restart File = "case.result"
  Restart Position = 1
End

Constants
  Gravity(4) = 0 -1 0 0
  Stefan Boltzmann = 5.67e-08
  Permittivity of Vacuum = 8.8542e-12
  Boltzmann Constant = 1.3807e-23
  Unit Charge = 1.602e-19

```

End

Body 1

```
Target Bodies(1) = 1
Name = "Body 1"
Equation = 1
Material = 1
Initial condition = 1
```

End

Solver 3

```
Equation = K-Epsilon
Procedure = "KESolver" "KESolver"
Exec Solver = Always
Stabilize = True
Bubbles = False
Lumped Mass Matrix = False
Optimize Bandwidth = True
Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-4
Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-5
Nonlinear System Max Iterations = 5
Nonlinear System Newton After Iterations = 3
Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
Nonlinear System Relaxation Factor = 0.5
Linear System Solver = Iterative
Linear System Iterative Method = BiCGStab
Linear System Max Iterations = 1500
Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-6
BiCGStab polynomial degree = 2
Linear System Preconditioning = ILU1
Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
Linear System Abort Not Converged = False
Linear System Residual Output = 1
Linear System Precondition Recompute = 1
```

End

Solver 2

```
Equation = Navier-Stokes
Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
Procedure = "FlowSolve" "FlowSolver"
Exec Solver = Always
Stabilize = True
Bubbles = False
Lumped Mass Matrix = False
Optimize Bandwidth = True
Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-4
Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-5
Nonlinear System Max Iterations = 2
Nonlinear System Newton After Iterations = 3
Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
Nonlinear System Relaxation Factor = 0.5
Linear System Solver = Iterative
Linear System Iterative Method = BiCGStab
Linear System Max Iterations = 1500
Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-6
BiCGStab polynomial degree = 2
Linear System Preconditioning = ILU3
Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
Linear System Abort Not Converged = False
Linear System Residual Output = 1
Linear System Precondition Recompute = 1
```

End

Solver 1

```
Equation = Result Output
```

```

Output Format = Vtu
Procedure = "ResultOutputSolve" "ResultOutputSolver"
Output File Name = case
Exec Solver = After Timestep
End

Equation 1
  Name = "N-S_k-e"
  Active Solvers(3) = 3 2 1
End

Material 1
  Name = "Air (room temperature)"
  Viscosity Model = K-Epsilon
  Viscosity = 1.983e-5
  Heat expansion Coefficient = 3.43e-3
  Heat Conductivity = 0.0257
  Relative Permittivity = 1.00059
  Sound speed = 343.0
  Heat Capacity = 1005.0
  Density = 1.205
End

Initial Condition 1
  Name = "InitialCondition 1"
  Kinetic Energy = 0.35
  Velocity 2 = 0.0
  Kinetic Dissipation = 3.92
End

Boundary Condition 1
  Target Boundaries(1) = 1
  Name = "Inlet_master"
  Pressure 1 = 1000
  Periodic BC Velocity 3 = True
  Periodic BC Velocity 2 = True
  Periodic BC Velocity 1 = True
  Periodic BC Kinetic Energy = Logical True
  Periodic BC Kinetic Dissipation = Logical True
  Periodic BC = 2
End

Boundary Condition 2
  Target Boundaries(1) = 2
  Name = "Outlet_slave"
  Velocity 2 = 0.0
  Pressure 1 = 0.0
End

Boundary Condition 3
  Target Boundaries(1) = 3
  Name = "walls 3"
  Wall Law = True
  Normal-Tangential Velocity = True
  Velocity 1 = 0.0
  Boundary Layer Thickness = 0.006
End

Boundary Condition 4
  Target Boundaries(1) = 4
  Name = "walls 4"
  Wall Law = True
  Normal-Tangential Velocity = True
  Velocity 1 = 0.0
  Boundary Layer Thickness = 0.004

```

End

Boundary Condition 5

Target Boundaries(1) = 5
 Name = "walls tubs 5"
 Wall Law = True
 Normal-Tangential Velocity = True
 Velocity 1 = 0.0
 Boundary Layer Thickness = 0.003

End

Boundary Condition 6

Target Boundaries(1) = 6
 Name = "periodic master 6"
 Periodic BC = 7
 Periodic BC Pressure = True
 Periodic BC Velocity 3 = True
 Periodic BC Velocity 2 = True
 Periodic BC Velocity 1 = True
 Periodic BC Kinetic Energy = Logical True
 Periodic BC Kinetic Dissipation = Logical True

End

Boundary Condition 7

Target Boundaries(1) = 7
 Name = "Periodic slave 7"

End

Boundary Condition 8

Target Boundaries(1) = 8
 Name = "Periodic master 8"
 Periodic BC = 9
 Periodic BC Pressure = True
 Periodic BC Velocity 3 = True
 Periodic BC Velocity 2 = True
 Periodic BC Velocity 1 = True
 Periodic BC Kinetic Energy = Logical True
 Periodic BC Kinetic Dissipation = Logical True

End

Boundary Condition 9

Target Boundaries(1) = 9
 Name = "Periodic slave 9"

End